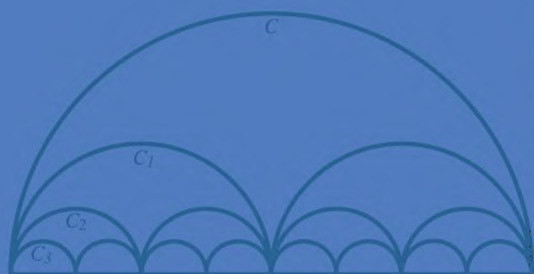
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NÂNG CAO







NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐOÀN QUỲNH (Tổng Chủ biên) - NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN LIÊM - NGUYỄN KHẮC MINH - ĐẶNG HÙNG THẮNG

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ mười ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

KÍ HIỆU DÙNG TRONG SÁCH :

Hn Câu hỏi hoặc hoạt động thứ n trong bài học.

□ Kết thúc chứng minh một định lí, hệ quả, ví dụ.

01–2020/CXBIPH/747–869/GD Mã số : NH101T0

Chương 

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



Nhiều hiện tượng tuần hoàn đơn giản trong thực tế được mô tả bởi những hàm số lượng giác. Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về các **hàm số lượng giác** và cách giải các **phương trình lượng giác** đơn giản.

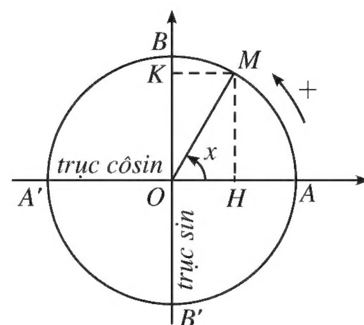
Khi học chương này học sinh cần chú ý tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác và phương pháp sử dụng đường tròn lượng giác để tìm nghiệp của các phương trình lượng giác cơ bản. Ngoài ra, học sinh cần rèn luyện kĩ năng biến đổi lượng giác và kĩ năng giải các dạng phương trình lượng giác được quy định trong chương trình.

§ 1 CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các hàm số lượng giác thường được dùng để mô tả những hiện tượng thay đổi một cách tuần hoàn hay gặp trong thực tiễn, khoa học và kĩ thuật. Trong bài này, ta tìm hiểu các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

1. Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

H1 *Trên hình 1.1, hãy chỉ ra các đoạn thẳng có độ dài đại số bằng* $\sin x$, *bằng* $\cos x$. *Tính* $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos 2\pi$.



Hình 1.1

a) Định nghĩa

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.
>
> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với côsin của góc lượng giác có số đo rađian bằng x được gọi là **hàm số côsin**, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$. Do đó các hàm số sin và côsin được viết là

$$\textbf{sin} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \textbf{cos} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x \qquad x \mapsto \cos x.$$

Nhận xét

Hàm số $y = \sin x$ là một *hàm số lẻ* vì $\sin(-x) = -\sin x$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

H2 *Tại sao có thể khẳng định hàm số* $y = \cos x$ *là một hàm số chẵn ?*

b) Tính chất tuần hoàn của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$

Ta đã biết, với mỗi số nguyên k, số $k2\pi$ thoả mãn

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Ngược lại, có thể chứng minh rằng số T sao cho

$$\sin(x+T) = \sin x \text{ với mọi } x$$

phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên.

Rõ ràng, trong các số dạng $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), số dương nhỏ nhất là 2π.

Vậy đối với hàm số $y = \sin x$, số $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\sin(x + T) = \sin x \text{ với mọi } x.$$

Hàm số $y = \cos x$ cũng có tính chất tương tự.

Ta nói hai hàm số đó là những *hàm số tuần hoàn với chu kì* 2π.

Từ tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, ta thấy khi biết giá trị các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ trên một đoạn có độ dài 2π (chẳng hạn đoạn $[0 ; 2\pi]$ hay đoạn $[-\pi ; \pi]$) thì ta tính được giá trị của chúng tại mọi x. (Cứ mỗi khi biến số được cộng thêm 2π thì giá trị của các hàm số đó lại trở về như cũ ; điều này giải thích từ "tuần hoàn").

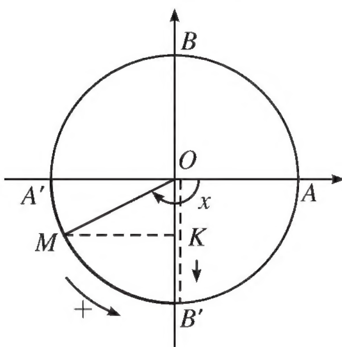
c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \sin x$

Do hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π nên ta chỉ cần khảo sát hàm số đó trên một đoạn có độ dài 2π, chẳng hạn trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

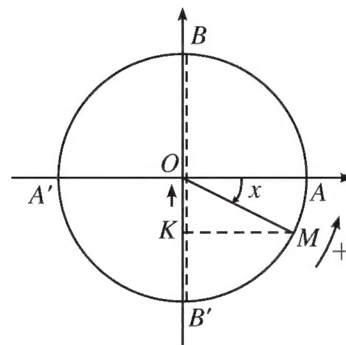
• *Chiều biến thiên* (xem các hình 1.2, 1.3, 1.4)

Cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\pi$ đến π, tức là cho M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng xuất phát từ A' và quan sát sự thay đổi của điểm K (K là hình chiếu của M trên trục sin, $\overline{OK} = \sin x$), ta thấy :

– Khi x tăng từ $-\pi$ đến $-\dfrac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ A' đến B' và điểm K chạy dọc trục sin từ O đến B'. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, giảm từ 0 đến -1 (h. 1.2).



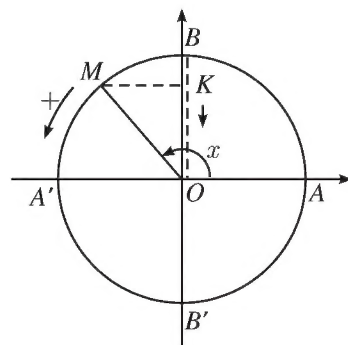
Hình 1.2



Hình 1.3

– Khi x tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B và điểm K chạy dọc trục sin từ B' đến B. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, tăng từ -1 đến 1 (h. 1.3).

– Khi x tăng từ $\frac{\pi}{2}$ đến π thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B đến A' và điểm K chạy dọc trục sin từ B đến O. Do đó $\overline{OK}$, tức là $\sin x$, giảm từ 1 đến 0 (h. 1.4).



Hình 1.4

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ như sau :

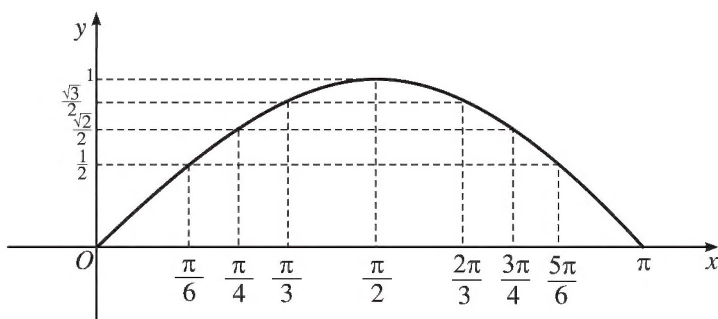
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y = \sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

• *Đồ thị*

– Khi vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, ta nên để ý rằng : Hàm số $y = \sin x$ là một hàm số lẻ, do đó đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng. Vì vậy, đầu tiên ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$.

Trên đoạn $[0 ; \pi]$, đồ thị của hàm số $y = \sin x$ (h. 1.5) đi qua các điểm có toạ độ $(x ; y)$ trong bảng sau :

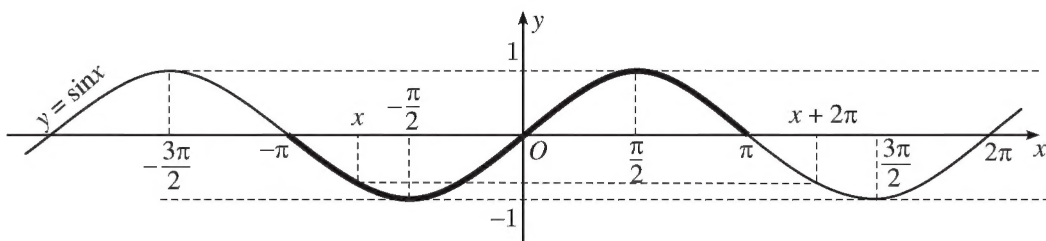
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (≈ 0,71)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (≈ 0,87)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (≈ 0,87)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (≈ 0,71)	$\frac{1}{2}$	0



Hình 1.5

Phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$ cùng với hình đối xứng của nó qua gốc O lập thành đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi ; \pi]$ (h.1.6).

– Tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải những đoạn có độ dài 2π, 4π, 6π,... thì được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \sin x$. Đồ thị đó được gọi là một *đường hình sin* (h. 1.6).



Hình 1.6

Nhận xét

1) Khi x thay đổi, hàm số $y = \sin x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1 ; 1]$. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1 ; 1]$.

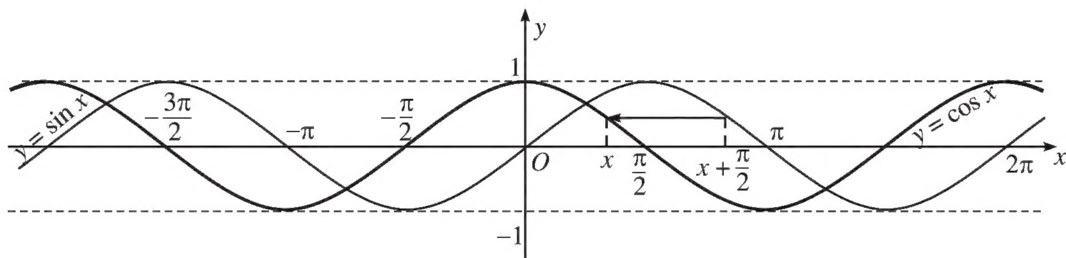
2) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó, do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

H3 *Hỏi khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cos x$

Ta có thể tiến hành khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \sin x$ trên đây. Tuy nhiên, ta nhận thấy $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ với mọi x, nên bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ (nó cũng được gọi là một *đường hình sin*) (h. 1.7).



Hình 1.7

Căn cứ vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$, ta lập được bảng biến thiên của hàm số đó trên đoạn $[-\pi ; \pi]$:

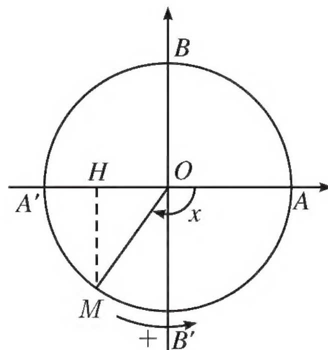
x	$-\pi$		0		π
$y = \cos x$	-1	↗	1	↘	-1

H4 *Hãy kiểm nghiệm lại bảng biến thiên trên bằng cách quan sát chuyển động của điểm H trên trục côsin, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên trục côsin, khi điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương một vòng xuất phát từ điểm A' (h. 1.8).*

Nhận xét

1) Khi x thay đổi, hàm số $y = \cos x$ nhận mọi giá trị thuộc đoạn $[-1 ; 1]$. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \cos x$ là đoạn $[-1 ; 1]$.

2) Do hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị của hàm số $y = \cos x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.



Hình 1.8

3) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi ; 0)$. Từ đó do tính chất tuần hoàn với chu kì 2π, hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi ; k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

H5 *Hỏi khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0 ; \pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi ; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

GHI NHỚ

Hàm số $y = \sin x$	Hàm số $y = \cos x$
– Có tập xác định là $\mathbb{R}$; – Có tập giá trị là $[-1 ; 1]$; – Là hàm số lẻ ; – Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π ; – Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi ; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$; – Có đồ thị là một đường hình sin.	– Có tập xác định là $\mathbb{R}$; – Có tập giá trị là $[-1 ; 1]$; – Là hàm số chẵn ; – Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π ; – Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi ; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi ; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; – Có đồ thị là một đường hình sin.

2. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$

a) Định nghĩa

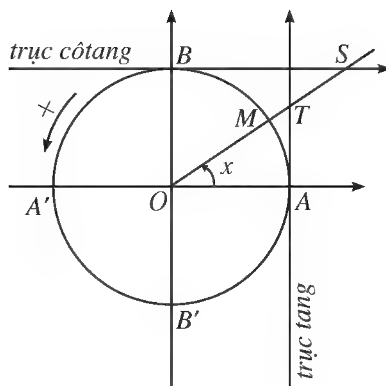
• Với mỗi số thực x mà $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Đặt $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$.

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_1$ với số thực $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y = \tan x$.

Vậy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định $\mathcal{D}_1$; ta viết

$$\tan : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \tan x.$$



Hình 1.9

• Với mỗi số thực x mà $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ta xác định được số thực $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Đặt $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

> Quy tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathcal{D}_2$ với số thực $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số côtang**, kí hiệu là $y = \cot x$.

Vậy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathcal{D}_2$; ta viết

$$\cot : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \cot x.$$

Trên hình 1.9 ta có $(OA, OM) = x$, $\tan x = \overline{AT}$, $\cot x = \overline{BS}$.

Nhận xét

1) Hàm số $y = \tan x$ là một *hàm số lẻ* vì nếu $x \in \mathcal{D}_1$ thì $-x \in \mathcal{D}_1$ và $\tan(-x) = -\tan x$.

2) Hàm số $y = \cot x$ cũng là một *hàm số lẻ* vì nếu $x \in \mathcal{D}_2$ thì $-x \in \mathcal{D}_2$ và $\cot(-x) = -\cot x$.

b) Tính chất tuần hoàn

Có thể chứng minh rằng $T = \pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\tan(x + T) = \tan x \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}_1,$$

và $T = \pi$ cũng là số dương nhỏ nhất thoả mãn

$$\cot(x + T) = \cot x \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}_2.$$

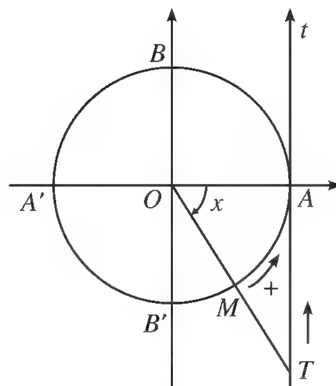
Ta nói các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là những *hàm số tuần hoàn với chu kì* π.

c) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \tan x$

Do tính chất tuần hoàn với chu kì π của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \subset \mathcal{D}_1$, rồi tịnh tiến phần đồ thị vừa vẽ sang trái, sang phải các đoạn có độ dài π, 2π, 3π,... thì được toàn bộ đồ thị của hàm số $y = \tan x$.

• *Chiều biến thiên* (h. 1.10) :

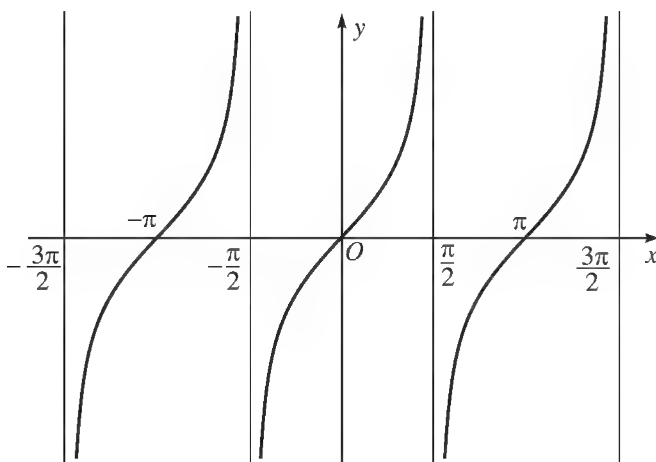
Khi cho $x = (OA, OM)$ tăng từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$ (không kể $-\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2}$) thì điểm M chạy trên đường tròn lượng giác theo chiều dương từ B' đến B (không kể B' và B). Khi đó điểm T thuộc trục tang At sao cho $\overline{AT} = \tan x$ chạy dọc theo At suốt từ dưới lên trên, nên $\tan x$ *tăng từ* $-\infty$ *đến* $+\infty$ (qua giá trị 0 khi $x = 0$).



Hình 1.10

H6 *Tại sao có thể khẳng định hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$?*

• *Đồ thị* : Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ có dạng như ở hình 1.11.



Hình 1.11

Nhận xét

1) Khi x thay đổi, hàm số $y = \tan x$ nhận mọi giá trị thực. Ta nói *tập giá trị* của hàm số $y = \tan x$ là $\mathbb{R}$.

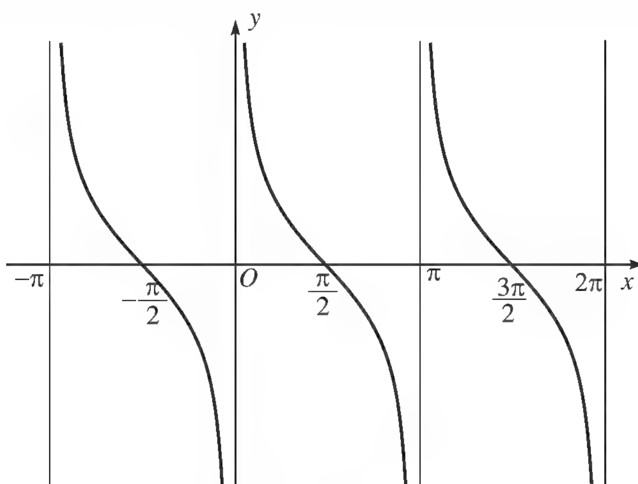
2) Vì hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của nó nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

3) Hàm số $y = \tan x$ không xác định tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\,;0\right)$ gọi là một *đường tiệm cận* của đồ thị hàm số $y = \tan x$. (Từ "tiệm cận" có nghĩa là ngày càng gần. Chẳng hạn nói đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ là một đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \tan x$ nhằm diễn tả tính chất : điểm M trên đồ thị có hoành độ càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì M càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$).

d) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ là một hàm số tuần hoàn với chu kì π. Ta có thể khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của nó tương tự như đã làm đối với hàm số $y = \tan x$.

Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ có dạng như hình 1.12. Nó nhận mỗi đường thẳng vuông góc với trục hoành, đi qua điểm $(k\pi\,;0)$, $k \in \mathbb{Z}$ làm một đường tiệm cận.



Hình 1.12

GHI NHỚ

Hàm số $y = \tan x$	Hàm số $y = \cot x$
- Có tập xác định là $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$;	- Có tập xác định là $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;	- Có tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Là hàm số lẻ ;	- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π ;	- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π ;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;	- Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi ; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.	- Có đồ thị nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ làm một đường tiệm cận.

3. Về khái niệm hàm số tuần hoàn

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì 2π ; các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì π.

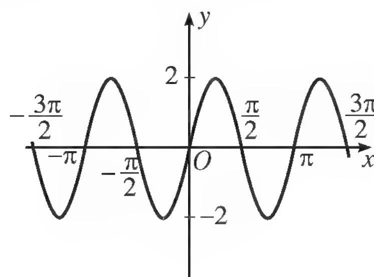
Một cách tổng quát :

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có

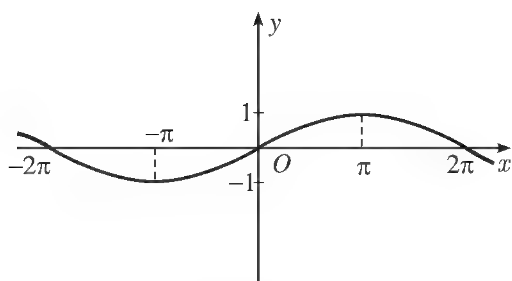
$$x + T \in \mathcal{D}, x - T \in \mathcal{D} \text{ và } f(x + T) = f(x).$$

Nếu có số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là một **hàm số tuần hoàn với chu kì** T.

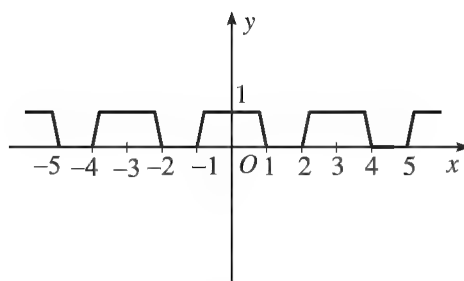
Ví dụ. Các hàm số $y = 2\sin 2x$ (đồ thị ở hình 1.13), hàm số $y = \sin\frac{x}{2}$ (đồ thị ở hình 1.14), và hàm số có đồ thị ở hình 1.15 là những hàm số tuần hoàn.



Hình 1.13



Hình 1.14



Hình 1.15

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \sqrt{3 - \sin x}$;

b) $y = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$;

d) $y = \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $y = -2\sin x$;

b) $y = 3\sin x - 2$;

c) $y = \sin x - \cos x$;

d) $y = \sin x\cos^2 x + \tan x$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau :

a) $y = 2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 3$;

b) $y = \sqrt{1 - \sin(x^2)} - 1$;

c) $y = 4\sin\sqrt{x}$.

4. Cho các hàm số $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \tan x$ và các khoảng $J_1 = \left(\pi ; \dfrac{3\pi}{2}\right), J_2 = \left(-\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{4}\right), J_3 = \left(\dfrac{31\pi}{4} ; \dfrac{33\pi}{4}\right), J_4 = \left(-\dfrac{452\pi}{3} ; -\dfrac{601\pi}{4}\right)$.

Hỏi hàm số nào trong ba hàm số đó đồng biến trên khoảng J_1 ? Trên khoảng J_2 ? Trên khoảng J_3 ? Trên khoảng J_4 ? (Trả lời bằng cách lập bảng).

5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ? Khẳng định nào sai ? Giải thích vì sao.

a) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

b) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \sin^2 x$ đồng biến thì hàm số $y = \cos^2 x$ nghịch biến.

6. Cho hàm số $y = f(x) = 2\sin 2x$.

a) Chứng minh rằng với số nguyên k tuỳ ý, luôn có $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 2\sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2\sin 2x$.

Bài đọc thêm

DAO ĐỘNG ĐIỀU HOÀ

Nhiều hiện tượng tự nhiên thay đổi có tính chất tuần hoàn (lặp đi lặp lại sau khoảng thời gian xác định) như :

– Chuyển động của các hành tinh trong hệ mặt trời,

– Chuyển động của guồng nước quay,

– Chuyển động của quả lắc đồng hồ,

– Sự biến thiên của cường độ dòng điện xoay chiều,...

Hiện tượng tuần hoàn đơn giản nhất là *dao động điều hoà* được mô tả bởi hàm số

$$y = A\sin(\omega x + \alpha) + B,$$

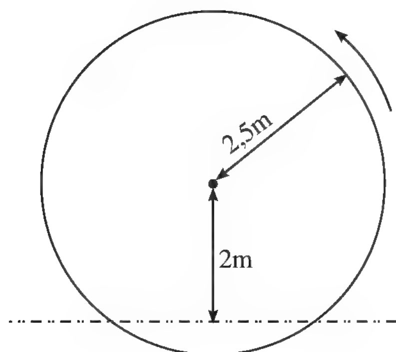
trong đó A, B, ω và α là những hằng số ; A và ω khác 0. Đó là hàm số tuần hoàn với chu kì $\frac{2\pi}{|\omega|}$; $|A|$ gọi là biên độ. Đồ thị của nó là một *đường hình sin* có được từ đồ thị của hàm số $y = A\sin\omega x$ bằng cách tịnh tiến thích hợp (theo vectơ $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i}$ rồi theo vectơ $B\vec{j}$, tức là tịnh tiến theo vectơ $-\frac{\alpha}{\omega}\vec{i} + B\vec{j}$).

Ví dụ. Một guồng nước có bán kính 2,5m, có trục quay ở cách mặt nước 2m, quay đều mỗi phút một vòng (h. 1.16). Gọi y (mét) là "khoảng cách" từ mặt nước đến một chiếc gầu của guồng nước ở thời điểm x (phút) (quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên

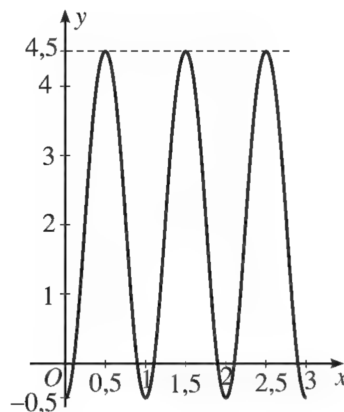
trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước). Biết rằng sau khi khởi động $\frac{1}{2}$ phút thì chiếc gầu đó ở đỉnh cao nhất của guồng nước. Từ các điều đó ta suy ra

$$y = 2 + 2,5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right].$$

Đồ thị của hàm số này có dạng như ở hình 1.17.



Hình 1.16



Hình 1.17

Luyện tập

7. Xét tính chẵn - lẻ của mỗi hàm số sau :

a) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \tan x - \sin 2x$.

8. Cho các hàm số sau :

a) $y = -\sin^2 x$; b) $y = 3\tan^2 x + 1$;

c) $y = \sin x \cos x$; d) $y = \sin x \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$.

Chứng minh rằng mỗi hàm số $y = f(x)$ đó đều có tính chất :

$f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$, x thuộc tập xác định của hàm số f.

9. Cho hàm số $y = f(x) = A\sin(\omega x + \alpha)$ (A, ω và α là những hằng số ; A và ω khác 0). Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, ta có $f\left(x + k.\frac{2\pi}{\omega}\right) = f(x)$ với mọi x.

10. Chứng minh rằng mọi giao điểm của đường thẳng xác định bởi phương trình $y = \frac{x}{3}$ với đồ thị của hàm số $y = \sin x$ đều cách gốc toạ độ một khoảng nhỏ hơn $\sqrt{10}$.

11. Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :

a) $y = -\sin x$; b) $y = |\sin x|$; c) $y = \sin|x|$.

12. a) Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, hãy suy ra đồ thị của các hàm số sau và vẽ đồ thị của các hàm số đó :

$$y = \cos x + 2 \ ; \qquad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Hỏi mỗi hàm số đó có phải là hàm số tuần hoàn không ?

13. Xét hàm số $y = f(x) = \cos\frac{x}{2}\cdot$

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k, $f(x + k4\pi) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}$ trên đoạn $[-2\pi ; 2\pi]$.

c) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \cos x$ và $y = \cos\frac{x}{2}$ trong cùng một hệ toạ độ vuông góc Oxy.

d) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét phép biến hình F biến mỗi điểm $(x ; y)$ thành điểm $(x' ; y')$ sao cho $x' = 2x$ và $y' = y$. Chứng minh rằng F biến đồ thị của hàm số $y = \cos x$ thành đồ thị của hàm số $y = \cos\frac{x}{2}\cdot$

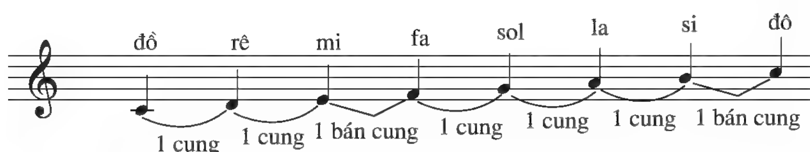


ÂM THANH

Âm thanh được tạo nên bởi sự thay đổi áp suất của môi trường vật chất (chất khí, chất lỏng, chất rắn) một cách tuần hoàn theo thời gian (dao động tuần hoàn) và được lan truyền trong môi trường đó (sóng âm thanh).

Nếu dao động tuần hoàn ấy có chu kì T (đo bằng đơn vị thời gian là giây) thì $\frac{1}{T}$ gọi là *tần số* của dao động (tức là số chu kì trong một giây) ; đơn vị của tần số là Héc (Hertz) viết tắt là Hz. Âm thanh tai người nghe được là dao động có tần số trong khoảng từ 17-20 Hz đến 20 000 Hz. Dao động có tần số cao hơn 20 000 Hz được gọi là siêu âm.

Trong âm nhạc (nghệ thuật phối hợp các âm thanh) người ta thường dùng những nốt nhạc để ghi những âm có tần số xác định. Tần số dao động càng lớn thì âm càng cao. Khi tăng tần số một âm lên gấp đôi thì ta nói cao độ của âm đó được tăng thêm một quãng tám. Người ta thường chia quãng tám đó thành 12 quãng bằng nhau, mỗi quãng gọi là một bán cung để đo chênh lệch cao độ giữa các âm (xem Sách giáo khoa "Âm nhạc và mĩ thuật" lớp 7). Với hai âm cách nhau một bán cung, tỉ số các tần số của chúng bằng $\sqrt[12]{2}$; với hai âm cách nhau một cung (tức là hai bán cung), tỉ số các tần số của chúng bằng $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2}$. Ở khuông nhạc dưới đây có ghi các nốt nhạc của một "âm giai" (quãng tám) cùng khoảng cách cao độ giữa hai âm ứng với hai nốt kề nhau. Âm *la* của âm giai đó có tần số 440 Hz (do đó, chẳng hạn âm *si* kế đó có tần số $440\sqrt[6]{2}$ Hz).




Joseph Fourier
(1768 - 1830)

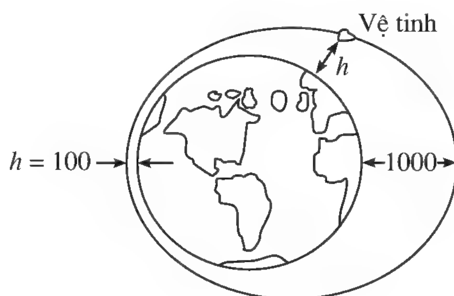
Trong âm nhạc, ngoài các âm riêng lẻ còn có hợp âm (kết hợp các âm thanh). Nhà toán học Pháp Phu-ri-ê (Fourier) đã chứng minh rằng một hàm số tuần hoàn với chu kì T có thể phân tích thành "tổng" của một hằng số với những hàm số tuần hoàn có đồ thị là những đường hình sin với chu kì $\frac{T}{n}$ (n là số nguyên dương). Điều đó giúp ta hiểu sâu hơn về hợp âm, hoà âm, âm bội và âm sắc.

§ 2 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Ta xét bài toán sau :

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình elip (h. 1.18). Độ cao h (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h = 550 + 450\cos\frac{\pi}{50}t,$$



Hình 1.18

trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250km. Hãy tìm các thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó.

Bài toán này dẫn đến việc giải phương trình

$$550 + 450\cos\frac{\pi}{50}t = 250, \text{ hay } \cos\frac{\pi}{50}t = -\frac{2}{3}.$$

Nếu đặt $x = \frac{\pi}{50}t$ thì phương trình trên có dạng $\cos x = -\frac{2}{3}$.

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải các phương trình có một trong các dạng

$$\sin x = m,\ \cos x = m,\ \tan x = m \text{ và } \cot x = m,$$

trong đó x là ẩn số ($x \in \mathbb{R}$) và m là một số cho trước.

Đó là các **phương trình lượng giác cơ bản**.

1. Phương trình $\sin x = m$

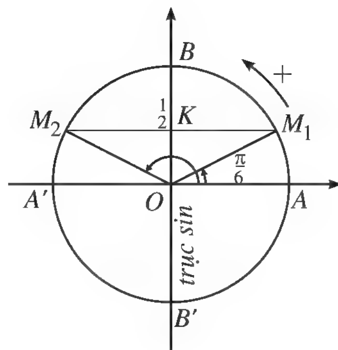
a) Để làm ví dụ, ta xét một phương trình cụ thể, chẳng hạn

$$\sin x = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$

H1 *Tìm một nghiệm của phương trình* (1).

Để tìm tất cả các nghiệm của (1), ta có thể làm như sau :

Xét đường tròn lượng giác gốc A. Trên trục sin, ta lấy điểm K sao cho $\overline{OK} = \frac{1}{2}$. Đường thẳng qua K và vuông góc với trục sin cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2 ; hai điểm này đối xứng với nhau qua trục sin (h. 1.19). Ta có



Hình 1.19

$$\sin(OA, OM_1) = \sin(OA, OM_2) = \overline{OK} = \frac{1}{2}.$$

Dễ thấy, số đo (rađian) của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (1). Lấy một nghiệm tuỳ ý của (1), chẳng hạn $x = \frac{\pi}{6}$. Khi đó các góc (OA, OM_1) có số đo $\frac{\pi}{6} + k2\pi$; các góc (OA, OM_2) có số đo $\pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Vậy

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ hoặc } x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Sử dụng kí hiệu "[" thay cho từ "hoặc", ta có thể viết lại kết quả trên như sau :

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Giả sử m là một số đã cho. Xét phương trình

$$\sin x = m. \qquad \text{(I)}$$

Hiển nhiên phương trình (I) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta đã biết, $|\sin x| \leq 1$ với mọi x. Do đó phương trình (I) vô nghiệm khi $|m| > 1$. Mặt khác, khi x thay đổi, $\sin x$ nhận mọi giá trị từ -1 đến 1 nên phương trình (I) luôn có nghiệm khi $|m| \leq 1$.

Làm tương tự như đối với phương trình (1), ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (I), nghĩa là $\sin\alpha = m$ thì
> $$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \qquad \text{(Ia)}$$

Ta nói rằng $x = \alpha + k2\pi$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi$ là hai *họ nghiệm* của phương trình (I).

Kể từ đây, để cho gọn ta quy ước rằng nếu trong một biểu thức nghiệm của phương trình lượng giác có chứa k mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu rằng k nhận mọi giá trị thuộc $\mathbb{Z}$. Chẳng hạn, $x = \alpha + k2\pi$ có nghĩa là x lấy mọi giá trị thuộc tập hợp

$$\{\alpha, \alpha \pm 2\pi, \alpha \pm 4\pi, \alpha \pm 6\pi, ...\}.$$

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

1) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \dfrac{2}{3}\cdot$

Giải

1) Do $\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + k2\pi. \end{array}\right.$$

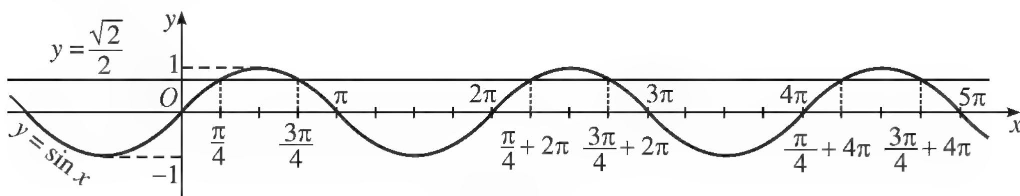
2) Vì $\dfrac{2}{3} < 1$ nên có số α để $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$. Do đó

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = \pi - \alpha + k2\pi. \end{array}\right.$$ □

H2 *Giải phương trình* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Trong mặt phẳng toạ độ, nếu vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng $(d): y = m$ thì hoành độ mỗi giao điểm của (d) và (G) (nếu có) là một nghiệm của phương trình $\sin x = m$.

H3 *Trên đồ thị hàm số* $y = \sin x$ *(h.1.20), hãy chỉ ra các điểm có hoành độ trong khoảng* $(0\ ;\ 5\pi)$ *là nghiệm của phương trình* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Hình 1.20

CHÚ Ý

1) Khi $m \in \{0\ ;\ \pm 1\}$, công thức (Ia) có thể viết gọn như sau :

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

2) Dễ thấy rằng với m cho trước mà $|m| \leq 1$, phương trình $\sin x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arcsin m$ (đọc là ác-sin m). Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin m + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy ở ví dụ 1 câu 2) có thể viết

$$\sin x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi, \\ x = \pi - \arcsin \frac{2}{3} + k2\pi. \end{array}\right.$$

3) Từ (Ia) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực thì $\sin\beta = \sin\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = \pi - \alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 2. Tìm số x thoả mãn phương trình $\sin(2x - \frac{\pi}{5}) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right)$.

Giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} + x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{5} = \pi - \left(\frac{\pi}{5} + x\right) + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Vậy các số x cần tìm là $x = \frac{2\pi}{5} + k2\pi$ và $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

H4 *Giải phương trình* $\sin 2x = \sin x$.

2. Phương trình cos *x* = *m*

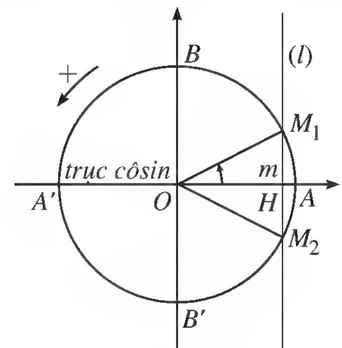
Xét phương trình

$$\cos x = m, \qquad \text{(II)}$$

trong đó m là một số cho trước. Hiển nhiên phương trình (II) xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy rằng :

Khi $|m| > 1$, phương trình (II) vô nghiệm.

Khi $|m| \leq 1$, phương trình (II) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (II), trên trục côsin ta lấy điểm H sao cho $\overline{OH} = m$. Gọi (l) là đường thẳng đi qua H và vuông góc với trục côsin (h. 1.21).



Hình 1.21

Do $|m| \leq 1$ nên đường thẳng (l) cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2. Hai điểm này đối xứng với nhau qua trục côsin (chúng trùng nhau nếu $m = \pm 1$). Ta thấy số đo của các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là tất cả các nghiệm của (II). Nếu α là số đo của một góc trong chúng, nói cách khác, nếu α là một nghiệm của (II) thì các góc đó có các số đo là $\alpha + k2\pi$ và $-\alpha + k2\pi$. Vậy ta có

> Nếu α là một nghiệm của phương trình (II), nghĩa là $\cos\alpha = m$ thì
>
> $$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi, \\ x = -\alpha + k2\pi. \end{array}\right. \qquad \text{(IIa)}$$

H5 *Giải phương trình sau* : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

CHÚ Ý

1) Đặc biệt, khi $m \in \{0 ; \pm 1\}$, công thức (IIa) có thể viết gọn như sau

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,$$
$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,$$
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

2) Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước mà $|m| \leq 1$, phương trình $\cos x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong đoạn $[0 ; \pi]$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arccos m$ (đọc là ác-côsin m). Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos m + k2\pi, \\ x = -\arccos m + k2\pi. \end{array}\right.$$

mà cũng thường được viết là $x = \pm \arccos m + k2\pi$.

3) Từ (IIa) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực thì $\cos\beta = \cos\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k2\pi$ hoặc $\beta = -\alpha + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

H6 *Hãy giải phương trình* $\cos(2x+1) = \cos(2x-1)$.

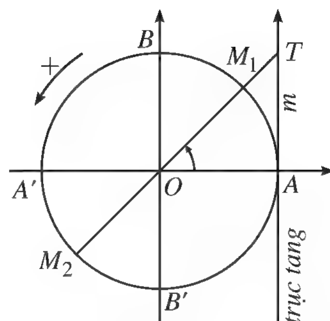
3. Phương trình $\tan x = m$

Cho m là một số tuỳ ý. Xét phương trình

$$\tan x = m. \qquad \text{(III)}$$

Điều kiện xác định (ĐKXĐ) của phương trình (III) là $\cos x \neq 0$.

Ta đã biết, khi x thay đổi, $\tan x$ nhận mọi giá trị từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó phương trình (III) luôn có nghiệm. Để tìm tất cả các nghiệm của (III), trên trục tang, ta lấy điểm T sao cho $\overline{AT} = m$. Đường thẳng OT cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1 và M_2 (h. 1.22). Ta có



Hình 1.22

$\tan(OA, OM_1) = \tan(OA, OM_2) = \overline{AT} = m.$

Gọi số đo của một trong các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) là α; nói cách khác, α là một nghiệm nào đó của phương trình (III). Khi đó, các góc lượng giác (OA, OM_1) và (OA, OM_2) có các số đo là $\alpha + k\pi$. Đó là tất cả các nghiệm của phương trình (III) (hiển nhiên chúng thoả mãn ĐKXĐ của (III)). Vậy ta có

Nếu α là một nghiệm của phương trình (III), nghĩa là $\tan\alpha = m$ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$ (IIIa)

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau :

1) $\tan x = -1$; 2) $\tan\dfrac{x}{3} = 3$.

Giải

1) Vì $-1 = \tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ nên

$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

2) Gọi α là một số mà $\tan\alpha = 3$. Khi đó

$$\tan\frac{x}{3} = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \alpha + k\pi \Leftrightarrow x = 3\alpha + k3\pi.$$

(Có thể tìm được một số α thoả mãn $\tan\alpha = 3$ bằng cách tra bảng số hoặc dùng máy tính bỏ túi. Cụ thể là $\alpha \approx 1{,}249$). □

CHÚ Ý

1) Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước, phương trình $\tan x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\arctan m$ (đọc là ác-tang m). Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi.$$

2) Từ (IIIa) ta thấy rằng : Nếu α và β là hai số thực mà $\tan\alpha$, $\tan\beta$ xác định thì $\tan\beta = \tan\alpha$ khi và chỉ khi có số nguyên k để $\beta = \alpha + k\pi$.

H7 *Giải phương trình* $\tan 2x = \tan x$.

4. Phương trình $\cot x = m$

Cho m là một số tuỳ ý, xét phương trình

$$\cot x = m. \qquad \text{(IV)}$$

ĐKXĐ của phương trình (IV) là $\sin x \neq 0$. Tương tự như đối với phương trình $\tan x = m$, ta có

Nếu α là một nghiệm của phương trình (IV), nghĩa là $\cot\alpha = m$ thì $$\cot x = m \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi. \qquad \text{(IVa)}$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau :

1) $\cot x = -\frac{1}{3}$; 2) $\cot 3x = 1$.

Giải

1) Gọi α là một số mà $\cot\alpha = -\frac{1}{3}$, tức là $\tan\alpha = -3$ (chẳng hạn, bằng bảng số hoặc máy tính bỏ túi, ta tìm được $\alpha \approx -1{,}249$). Khi đó

$$\cot x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi.$$

2) $\cot 3x = 1 \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$. □

CHÚ Ý

Dễ thấy rằng với mọi số m cho trước, phương trình $\cot x = m$ có đúng một nghiệm nằm trong khoảng $(0 ; \pi)$. Người ta thường kí hiệu nghiệm đó là $\text{arccot}\, m$ (đọc là ác-côtang m) Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow x = \text{arccot}\, m + k\pi.$$

H8 *Giải phương trình* $\cot\left(\frac{2x+1}{6}\right) = \tan\frac{1}{3}$.

5. Một số điều cần lưu ý

1) Khi đã cho số m, ta có thể tính được các giá trị $\arcsin m$, $\arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ bằng máy tính bỏ túi với các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ và $\tan^{-1}$ (xem *bài đọc thêm* trang 30).

2) $\arcsin m$, $\arccos m$ (với $|m| \le 1$), $\arctan m$ và $\text{arccot}\, m$ có giá trị là những số thực. Do đó ta viết, chẳng hạn $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ mà không viết $\arctan 1 = 45^o$.

3) Khi xét các phương trình lượng giác ta đã coi ẩn số x là số đo rađian của các góc lượng giác. Trên thực tế, ta còn gặp những bài toán yêu cầu tìm số đo độ của các góc (cung) lượng giác sao cho sin (côsin, tang hoặc côtang) của chúng bằng số m cho trước chẳng hạn $\sin(x + 20^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi giải các phương trình này (mà lạm dụng ngôn ngữ, ta vẫn gọi là giải các phương trình lượng giác), ta có thể áp dụng các công thức nêu trên và lưu ý sử dụng kí hiệu số đo độ trong "công thức nghiệm" cho thống nhất, chẳng hạn viết $x = 30^o + k360^o$ chứ không viết $x = 30^o + k2\pi$.

Tuy nhiên, ta quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng đơn vị đo góc là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo rađian của góc lượng giác.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sin(x + 20^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải

Vì $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^o$ nên

$$\sin(x + 20^o) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(x + 20^o) = \sin 60^o$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+20^o = 60^o + k360^o \\ x+20^o = 180^o - 60^o + k360^o \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40^o + k360^o \\ x = 100^o + k360^o \end{array}\right. \square$$

H9 *Giải các phương trình sau :*

1) $\cos(3x - 15^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *2)* $\tan 5x = \tan 25^o$.

Câu hỏi và bài tập

14. Giải các phương trình sau :

a) $\sin 4x = \sin\frac{\pi}{5}$; b) $\sin\left(\frac{x+\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$;

c) $\cos\frac{x}{2} = \cos\sqrt{2}$; d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{18}\right) = \frac{2}{5}$.

15. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó các điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi ; 4\pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = 1$;

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cos x$ đối với mỗi phương trình sau

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -1$.

16. Tìm nghiệm của các phương trình sau trong khoảng đã cho

a) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ với $0 < x < \pi$;

b) $\cos(x - 5) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$.

17. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố *A* ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ *t* của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Thành phố *A* có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm ?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố *A* có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố *A* có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất ?

18. Giải các phương trình sau

a) $\tan 3x = \tan\frac{3\pi}{5}$;

b) $\tan(x - 15^{\circ}) = 5$;

c) $\tan(2x - 1) = \sqrt{3}$;

d) $\cot 2x = \cot\left(-\frac{1}{3}\right)$;

e) $\cot\left(\frac{x}{4} + 20^{\circ}\right) = -\sqrt{3}$;

f) $\cot 3x = \tan\frac{2\pi}{5}$ ·

19. a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ rồi chỉ ra trên đồ thị đó các điểm có hoành độ thuộc khoảng $(-\pi\ ;\ \pi)$ là nghiệm của mỗi phương trình sau

1) $\tan x = -1$;

2) $\tan x = 0$;

b) Cũng câu hỏi tương tự cho hàm số $y = \cot x$ và cho mỗi phương trình sau

1) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\cot x = 1$.

20. Tìm nghiệm của các phương trình sau trên khoảng đã cho

a) $\tan(2x - 15^{\circ}) = 1$ với $-180^{\circ} < x < 90^{\circ}$;

b) $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

21. Khi giải phương trình $\tan x = -\sqrt{3}$, bạn Phương nhận thấy $-\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ và viết

$$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Cũng phương trình đó, bạn Quyên lấy $-\sqrt{3} = \tan\frac{2\pi}{3}$ nên giải như sau :

$$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

Theo em, ai giải đúng, ai giải sai ?

22. Tính các góc của tam giác ABC, biết $AB = \sqrt{2}$ cm, $AC = \sqrt{3}$ cm và đường cao $AH = 1$cm. (*Gợi ý :* Xét trường hợp B, C nằm khác phía đối với H và trường hợp B, C nằm cùng phía đối với H).

Bài đọc thêm

DÙNG MÁY TÍNH BỎ TÚI ĐỂ TÌM MỘT GÓC KHI BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA NÓ

Các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ và $\tan^{-1}$ của máy tính bỏ túi CASIO *fx - 500MS* được dùng để tìm số đo (độ hoặc rađian) của một góc khi biết một trong các giá trị lượng giác của nó. Muốn thế đối với máy tính CASIO *fx - 500MS* ta thực hiện hai bước sau :

Bước 1. Ấn định đơn vị đo góc (độ hoặc rađian).

Muốn tìm số đo độ, ta ấn [MODE] [MODE] [MODE] [1]. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ D.

Muốn tìm số đo rađian, ta ấn [MODE] [MODE] [MODE] [2]. Lúc này dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ R.

Bước 2. Tìm số đo góc.

Khi biết sin, côsin hay tang của góc α cần tìm bằng m, ta lần lượt ấn phím [SHIFT], và một trong các phím [$\sin^{-1}$], [$\cos^{-1}$], [$\tan^{-1}$], rồi nhập giá trị lượng giác m và cuối cùng ấn phím [=]. Lúc này, trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hay rađian tuỳ theo bước 1).

CHÚ Ý

1) Ở chế độ số đo rađian, các phím $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ cho kết quả (khi $|m| \leq 1$) là $\arcsin m$, $\arccos m$; phím $\tan^{-1}$ cho kết quả là $\arctan m$.

2) Ở chế độ số đo độ, các phím $\sin^{-1}$ và $\tan^{-1}$ cho kết quả là số đo góc α từ -90° đến 90° ; phím $\cos^{-1}$ cho kết quả là số đo góc α từ 0° đến 180°. Các kết quả ấy được hiển thị dưới dạng số thập phân, chẳng hạn $7{,}065272931^\circ$.

Ví dụ 1. Để tìm số đo độ của góc α khi biết $\sin\alpha = -0,5$, ta lần lượt ấn

MODE MODE MODE 1 (*Bước 1*) SHIFT $\sin^{-1}$ $-0,5$ = (*Bước 2*)

Trên màn hình hiện kết quả –30, nghĩa là $\alpha = -30^{\circ}$.

Ví dụ 2. Để tìm số đo độ của góc α khi biết $\sin\alpha = 0,123$, ta lần lượt ấn

MODE MODE MODE 1 (*Bước 1*) SHIFT $\sin^{-1}$ 0,123 = (*Bước 2*)

Trên màn hình hiện kết quả 7.065272931, nghĩa là $\alpha \approx 7,065272931^{\circ}$. Muốn đưa kết quả này về dạng độ-phút-giây, ta ấn tiếp

SHIFT ←°'"

Trên màn hình hiện kết quả 7□3□54.98, nghĩa là $\alpha \approx 7^{\circ}3'54,98'' \approx 7^{\circ}3'55''$.

Ví dụ 3. Để tìm số đo rađian của góc α khi biết $\tan\alpha = \sqrt{3} - 1$, ta lần lượt ấn

MODE MODE MODE 2 (*Bước 1*) SHIFT $\tan^{-1}$ (√ 3 – 1) = (*Bước 2*)

Trên màn hình hiện kết quả 0.631914312, đó là giá trị gần đúng của $\arctan(\sqrt{3} - 1)$.

Luyện tập

23. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

a) $y = \dfrac{1 - \cos x}{2\sin x + \sqrt{2}}$;

b) $y = \dfrac{\sin(x - 2)}{\cos 2x - \cos x}$;

c) $y = \dfrac{\tan x}{1 + \tan x}$;

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cot 2x + 1}$.

24. Giả sử một con tàu vũ trụ được phóng lên từ mũi Ca-na-vơ-ran (Canaveral) ở Mĩ. Nó chuyển động theo một quỹ đạo được mô tả trên một bản đồ phẳng

(quanh đường xích đạo) của mặt đất như hình 1.23 : điểm M mô tả cho con tàu, đường thẳng Δ mô tả cho đường xích đạo. Khoảng cách h (kilômet) từ M đến Δ được tính theo công thức $h = |d|$, trong đó

$$d = 4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t-10)\right],$$



Hình 1.23

với t (phút) là thời gian trôi qua kể từ khi con tàu đi vào quỹ đạo, $d > 0$ nếu M ở phía trên Δ, $d < 0$ nếu M ở phía dưới Δ.

a) Giả thiết rằng con tàu đi vào quỹ đạo ngay từ khi phóng lên tại mũi Ca-na-vơ-ran (tức là ứng với $t = 0$). Hãy tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng Δ, trong đó C là điểm trên bản đồ biểu diễn cho mũi Ca-na-vơ-ran.

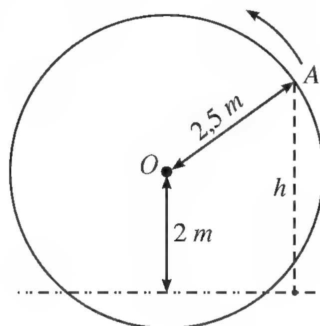
b) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = 2000$.

c) Tìm thời điểm sớm nhất sau khi con tàu đi vào quỹ đạo để có $d = -1236$.

(Tính chính xác các kết quả đến hàng phần nghìn).

25. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m ; trục của nó đặt cách mặt nước 2m (h. 1.24). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó

$$y = 2 + 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right],$$



Hình 1.24

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút ; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước (xem *bài đọc thêm* về dao động điều hoà trang 15). Hỏi :

a) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí thấp nhất ?

b) Khi nào thì chiếc gầu ở vị trí cao nhất ?

c) Chiếc gầu cách mặt nước 2m lần đầu tiên khi nào ?

26. Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, giải các phương trình sau :

a) $\cos 3x = \sin 2x$; b) $\sin(x - 120^{o}) - \cos 2x = 0$.

§ 3 MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƠN GIẢN

1. Phương trình bậc nhất và bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Trong mục này, ta xét các phương trình có dạng như : $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$ (phương trình bậc nhất đối với $\tan 2x$), hay $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ (phương trình bậc hai đối với $\sin x$), ...

Để giải các phương trình dạng này, ta chọn một biểu thức lượng giác thích hợp có mặt trong phương trình làm ẩn phụ và quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai đối với ẩn phụ đó (có thể nêu hoặc không nêu kí hiệu ẩn phụ).

a) Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$; 2) $\cos(x + 30^\circ) + 2\cos^2 15^\circ = 1$.

Giải

1) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\dfrac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}.$$

2) Để ý rằng : $1 - 2\cos^2 15^\circ = -\cos 30^\circ = \cos 150^\circ$, ta có

$\cos(x + 30^\circ) + 2\cos^2 15^\circ = 1 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = 1 - 2\cos^2 15^\circ$

$$\Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = \cos 150^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 30^\circ = 150^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = -150^\circ + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120^\circ + k360^\circ \\ x = -180^\circ + k360^\circ. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 120^\circ + k360^\circ$ và $x = -180^\circ + k360^\circ$ (riêng họ nghiệm thứ hai cũng có thể viết là $x = 180^\circ + k360^\circ$). □

b) Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

1) $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$; 2) $\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0$.

Giải

1) Đặt $\sin x = t$ (với $|t| \leq 1$), ta được phương trình $2t^2 + 5t - 3 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $t_1 = -3$ và $t_2 = \frac{1}{2}$, trong đó t_1 bị loại do không thoả mãn điều kiện $|t| \leq 1$. Do đó

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

2) Đặt $\cot 3x = t$, ta có phương trình $t^2 - t - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $t = -1$ và $t = 2$. Do đó

$$\cot^2 3x - \cot 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cot 3x = -1, \\ \cot 3x = 2. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ 3x = \text{arccot}\, 2 + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3}\text{arccot}\, 2 + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \text{ và } x = \frac{1}{3}\text{arccot}\, 2 + k\frac{\pi}{3}.$$ □

H1 *Giải phương trình* $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$.

Giải

$2\cos 2x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1) + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x - (2 + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$

(phương trình $\cos x = -\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ vô nghiệm vì $-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2} < -1$).

Kết luận : Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$. □

H2 *Giải phương trình* $5\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ *rồi biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.*

2. Phương trình bậc nhất đối với sin*x* và cos*x*

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải các phương trình dạng

$$a\sin x + b\cos x = c,$$

trong đó a, b và c là những số đã cho với a khác 0 hoặc b khác 0. Chúng được gọi là **phương trình bậc nhất đối với sin*x* và cos*x*.**

H3 *Sử dụng đẳng thức* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, *hãy giải phương trình* $\sin x + \cos x = 1$.

Để giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ *(a, b khác 0) ta biến đổi biểu thức* $a\sin x + b\cos x$ *thành dạng* $C\sin(x + \alpha)$ *hoặc dạng* $C\cos(x + \gamma)$ *(C, α, γ là những hằng số).*

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1. \qquad (1)$$

Giải

Ta có

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, \\ x=\pi+k2\pi. \end{array}\right.$$ □

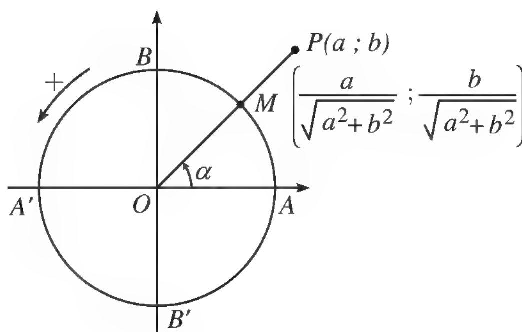
Một cách tổng quát ta có thể biến đổi biểu thức $a\sin x + b\cos x = c$ (a và b khác 0) thành dạng $C\sin(x+\alpha)=c$ như sau :

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right).$$

Do

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

nên điểm M với toạ độ $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác (xem cách dựng điểm M trong hình 1.25).



Hình 1.25

Vậy có số α để $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Từ đó ta có

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin x+\sin\alpha\cos x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha).$$

Bằng cách biến đổi như thế, việc giải phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ được đưa về giải phương trình lượng giác cơ bản $\sin(x+\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

CHÚ Ý

Nếu trong phép biến đổi trên, ta chọn số β để $\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ thì ta có

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x - \beta).$$

Ví dụ 5. Giải phương trình

$$2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = -3. \qquad (2)$$

Giải

Ta có

$$2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}\left(\frac{2}{3}\sin 3x + \frac{\sqrt{5}}{3}\cos 3x\right)$$

$$= 3(\sin\beta\sin 3x + \cos\beta\cos 3x),$$

trong đó $\sin\beta = \frac{2}{3}$ và $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow 3\cos(3x - \beta) = -3 \Leftrightarrow \cos(3x - \beta) = -1$

$$\Leftrightarrow 3x - \beta = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\beta + \pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}.$$ □

H4 *Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sin 3x + \sqrt{5}\cos 3x = m$ có nghiệm ?*

3. Phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Trong mục này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải phương trình dạng

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0,$$

trong đó a, b và c là những số đã cho, với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$. Chúng được gọi là **phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$**.

Để giải phương trình dạng này, ta chia hai vế cho $\cos^2 x$ (với điều kiện $\cos x \neq 0$) để đưa về phương trình đối với $\tan x$, hoặc chia hai vế cho $\sin^2 x$ (với điều kiện $\sin x \neq 0$) để đưa về phương trình đối với $\cot x$.

Ví dụ 6. Giải phương trình

$$4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0. \qquad (3)$$

Giải

Khi $\cos x = 0$ thì $\sin x = \pm 1$ nên dễ thấy các giá trị của x mà $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của (3).

Vậy chia hai vế của (3) cho $\cos^2 x$, ta được phương trình tương đương

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x}{\cos x} - 6 = 0.$$

Do đó

$$(3) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 5\tan x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 2, \\ \tan x = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan 2 + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right) + k\pi. \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình (3) là

$$x = \arctan 2 + k\pi \text{ và } x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + k\pi.$$ □

H5 *Giải phương trình (3) bằng cách chia hai vế cho* $\sin^2 x$.

Nhận xét

1) Phương trình $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ khi $a = 0$ hoặc $c = 0$ có thể được giải gọn hơn bằng cách đưa về phương trình tích. Chẳng hạn, đối với phương trình $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$, ta có

$$\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0.$$

2) Đối với phương trình

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d \; (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 \neq 0) \qquad (4)$$

ta có thể quy về giải phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ bằng cách viết d dưới dạng $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Chẳng hạn, đối với phương trình $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$, ta có thể làm như sau :

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x - 5\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

Ngoài ra ta cũng có thể quy phương trình (4) về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$ bằng cách sử dụng các công thức hạ bậc và công thức nhân đôi :

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x,\quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x,\quad 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

Chẳng hạn,

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$$
$$\Leftrightarrow (1 - \cos 2x) - \frac{5}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) = -2$$
$$\Leftrightarrow 3\cos 2x + 5\sin 2x = 5.$$

H6 *Giải phương trình* $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$ *bằng hai cách đã nêu trên.*

4. Một số ví dụ khác

Thực tế, chúng ta còn gặp nhiều phương trình lượng giác mà khi giải cần phải thực hiện các phép biến đổi lượng giác thích hợp để đưa chúng về các phương trình dạng quen thuộc. Trong mục này, chúng ta chỉ nêu một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x. \qquad (4)$$

Giải

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta có

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = \pm x + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, \\ x = k\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Kết luận : Phương trình đã cho có các nghiệm là $x = k\pi$ và $x = k\frac{\pi}{2}$. (Dễ thấy họ nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$ bao gồm cả họ nghiệm $x = k\pi$ nên có thể nói phương trình (4) có các nghiệm là $x = k\frac{\pi}{2}$). □

Ví dụ 8. Để giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 3x = 2\sin^2 2x, \quad (5)$$

ta có thể sử dụng công thức hạ bậc và công thức biến đổi tổng thành tích.

Cụ thể ta có

$$(5) \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1 - \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x = 2\cos 4x \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x - 2\cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\,(\cos 2x - 1) = 0. \quad (6)$$

H7 *Giải tiếp phương trình (6) rồi kết luận về nghiệm của phương trình (5).*

Chú ý rằng khi giải phương trình lượng giác, ta cần lưu ý đến điều kiện xác định của nó để loại bỏ các nghiệm ngoại lai.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\tan 3x = \tan x$.

Giải

Với điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$, ta có

$$\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}\cdot$$

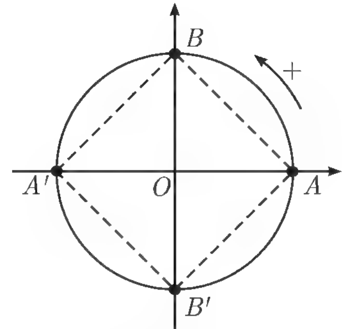
Để là nghiệm của phương trình đã cho, các giá trị $k\frac{\pi}{2}$ của x còn phải thoả mãn các điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Để kiểm tra các điều kiện này, ta có thể làm như sau : Các giá trị $x = k\frac{\pi}{2}$ gồm có bốn họ (h. 1.26) :

(A) : $x = k2\pi$ (ứng với điểm A) ;

(B) : $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (ứng với điểm B) ;

(A') : $x = \pi + k2\pi$ (ứng với điểm A') ;

(B') : $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ (ứng với điểm B').



Hình 1.26

Bằng cách thử trực tiếp, dễ thấy các họ (A) và (A') thoả mãn, còn (B) và (B') không thoả mãn các điều kiện $\cos 3x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Vậy phương trình $\tan 3x = \tan x$ có các nghiệm là $x = \pi + k2\pi$ và $x = k2\pi$ (hay còn có thể viết gọn là $x = k\pi$). □

H8 *Giải phương trình* $\cot 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu hỏi và bài tập

27. Giải các phương trình sau :

a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$; b) $\sqrt{3}\tan 3x - 3 = 0$;

c) $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$.

28. Giải các phương trình sau :

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

c) $\sqrt{3}\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + 1 = 0$.

29. Giải các phương trình sau trên khoảng đã cho rồi dùng bảng số hoặc máy tính bỏ túi để tính gần đúng nghiệm của chúng (tính chính xác đến hàng phần trăm) :

a) $3\cos 2x + 10\sin x + 1 = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$;

b) $4\cos 2x + 3 = 0$ trên $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cot^2 x - 3\cot x - 10 = 0$ trên $(0 ; \pi)$;

d) $5 - 3\tan 3x = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{6}\right)$.

30. Giải các phương trình sau :

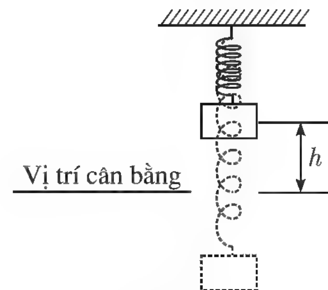
a) $3\cos x + 4\sin x = -5$;

b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$;

c) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$.

31. Một vật nặng treo bởi một chiếc lò xo, chuyển động lên xuống qua vị trí cân bằng (h. 1.27). Khoảng cách h từ vật đó đến vị trí cân bằng ở thời điểm t giây được tính theo công thức $h = |d|$ trong đó

$$d = 5\sin 6t - 4\cos 6t,$$



Hình 1.27

với d được tính bằng xentimet, ta quy ước rằng $d > 0$ khi vật ở phía trên vị trí cân bằng, $d < 0$ khi vật ở phía dưới vị trí cân bằng. Hỏi :

a) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở vị trí cân bằng ?

b) Ở vào thời điểm nào trong 1 giây đầu tiên, vật ở xa vị trí cân bằng nhất ?

(Tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

32. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi biểu thức sau :

a) $a\sin x + b\cos x$ (a và b là hằng số, $a^2 + b^2 \neq 0$) ;

b) $\sin^2 x + \sin x \cos x + 3\cos^2 x$;

c) $A\sin^2 x + B\sin x \cos x + C\cos^2 x$ (A, B và C là hằng số).

33. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 4$;

b) $3\sin^2 x + 4\sin 2x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}\cdot$

34. Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích hoặc tích thành tổng để giải các phương trình sau :

a) $\cos x \cos 5x = \cos 2x \cos 4x$;

b) $\cos 5x \sin 4x = \cos 3x \sin 2x$;

c) $\sin 2x + \sin 4x = \sin 6x$;

d) $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$.

35. Dùng công thức hạ bậc để giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 4x + \sin^2 3x = \sin^2 2x + \sin^2 x$;

b) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

36. Giải các phương trình sau :

a) $\tan\frac{x}{2} = \tan x$;

b) $\tan(2x + 10^\circ) + \cot x = 0$;

c) $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$;

d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x \cos x$;

e) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$.

Bài đọc thêm

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

• Trước hết, ta xét bài toán sau :

Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thuỷ triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12.$$



Hỏi tàu lớn có thể qua lại trên kênh trong khoảng thời gian nào trong ngày, biết rằng tàu lớn chỉ có thể đi được qua kênh khi độ sâu của nước là trên 11 mét ?

Để giải bài toán này, ta phải tìm các giá trị của t ($0 \leq t < 24$) thoả mãn

$$3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 > 11. \quad (1)$$

Như vậy, ta phải giải bất phương trình (1). Đó là một bất phương trình lượng giác.

Dễ thấy (1) tương đương với bất phương trình $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) > -\frac{1}{3}$; và nếu đặt $x = \frac{\pi t}{6} + 1$ thì bất phương trình này có dạng

$$\cos x > -\frac{1}{3}. \quad (2)$$

• Nói chung, việc giải một bất phương trình lượng giác được quy về giải các bất phương trình lượng giác có một trong các dạng

$$f(x) < m, f(x) \geq m, f(x) > m, f(x) \leq m, \quad (3)$$

trong đó m là một số cho trước, $f(x)$ là $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ hoặc $\cot x$. Các bất phương trình này gọi là các **bất phương trình lượng giác cơ bản**.

• Dựa vào tính chất tuần hoàn của các hàm số lượng giác, ta có thể giải một bất phương trình lượng giác cơ bản dạng (3) theo hai bước sau :

– *Bước 1.* Tìm nghiệm của bất phương trình trên một đoạn bất kì nào đó, chỉ cần đoạn đó có độ dài bằng chu kì của hàm số $y = f(x)$. Bước này có thể thực hiện bằng cách sử dụng đồ thị hoặc đường tròn lượng giác (xem ví dụ 1).

– *Bước 2.* Mở rộng kết quả lên toàn trục số bằng cách tịnh tiến miền nghiệm thu được ở bước 1 sang phải, sang trái những đoạn có độ dài bằng bội nguyên dương của chu kì. Bước này có thể tiến hành dựa vào nhận xét sau :

Cho $y = f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì T. Nếu bất phương trình $f(x) < m$ (hoặc $f(x) > m$, $f(x) \geq m$, $f(x) \leq m$) nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(a\ ;\ b)$ thì bất phương trình đó cũng nghiệm đúng với mọi x thuộc mỗi khoảng $(a + kT\ ;\ b + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

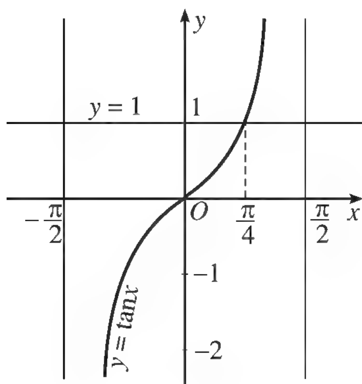
$$\tan x < 1. \qquad (4)$$

Phương pháp giải như sau :

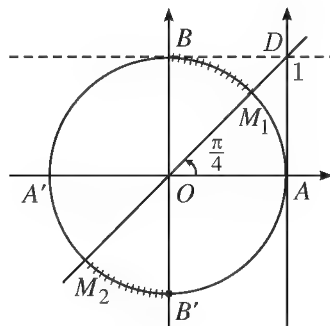
Bước 1. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì π nên trước hết ta tìm nghiệm của (4) trên một đoạn có độ dài π, chẳng hạn trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Có hai cách :

Cách 1 (sử dụng đồ thị). Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ và đường thẳng $y = 1$ (h. 1.28). Từ đó, dễ thấy trên đoạn ấy, bất phương trình $\tan x < 1$ có nghiệm là

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}. \qquad (5)$$



Hình 1.28



Hình 1.29

Cách 2 (sử dụng đường tròn lượng giác). Trên trục tang, chọn điểm D sao cho $\overline{AD} = 1$. Đường thẳng OD cắt đường tròn lượng giác tại M_1 và M_2 (h. 1.29). Để xác định nghiệm của bất phương trình trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, ta chỉ chú ý nửa đường tròn bên phải trục tung. Dễ thấy rằng nghiệm của bất phương trình $\tan x < 1$ là số đo radian của các cung lượng giác (trên nửa đường tròn đang xét) có điểm cuối M thuộc cung tròn $\overset{\frown}{B'AM_1}$. Suy ra $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$.

Bước 2. Sử dụng nhận xét trên, ta suy ra nghiệm của bất phương trình $\tan x < 1$ là

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi. \qquad \square$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình (2) :

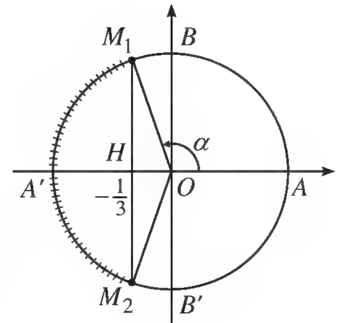
$$\cos x > -\frac{1}{3}.$$

Giải

Vì hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên trước hết ta tìm nghiệm của (2) trên đoạn $[-\pi ; \pi]$.

Trên trục côsin, ta chọn điểm H sao cho $\overline{OH} = -\frac{1}{3}$.

Gọi M_1 và M_2 là hai giao điểm của đường tròn lượng giác với đường thẳng đi qua H và vuông góc với trục côsin (h. 1.30). Dễ thấy rằng nghiệm của bất phương trình (2) là số đo radian của các cung lượng giác có điểm cuối M thuộc cung tròn $\overset{\frown}{M_2AM_1}$.



Hình 1.30

Gọi α là số đo rađian của cung tròn $\overset{\frown}{ABM_1}$ ($0 \le \alpha \le \pi$ và $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; dùng máy tính, ta tính được $\alpha \approx 1{,}911$). Khi đó, trên đoạn $[-\pi ; \pi]$, bất phương trình (2) có nghiệm là $-\alpha < x < \alpha$.

Mở rộng kết quả này lên toàn trục số, ta được tất cả các nghiệm của (2) là

$$-\alpha + k2\pi < x < \alpha + k2\pi \text{ (với } \alpha \approx 1{,}911). \qquad \square$$

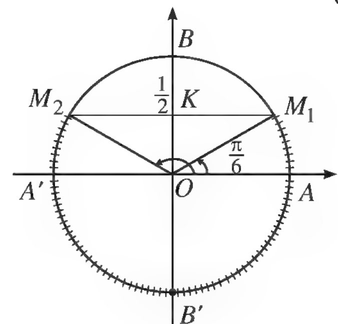
Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$\sin x > 0{,}5. \qquad (6)$$

Giải

Vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên trước hết ta tìm nghiệm của (6) trên đoạn $[0 ; 2\pi]$. Trên đoạn ấy, bất phương trình $\sin x > 0{,}5$ có nghiệm là $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (h. 1.31). (Có thể sử dụng một trong hai cách nêu trên để suy ra kết quả này). Do đó

$$\sin x > 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k2\pi. \quad \square$$

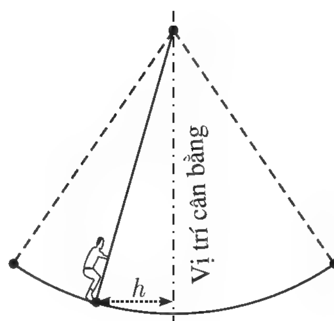


Hình 1.31

Luyện tập

37. Mùa xuân ở Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (tính bằng mét) từ người chơi đu đến vị trí cân bằng (h. 1.32) được biểu diễn qua thời gian t ($t \geq 0$ và được tính bằng giây) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước rằng $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp trái lại.





Hình 1.32

a) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu ở xa vị trí cân bằng nhất.

b) Tìm các thời điểm trong vòng 2 giây đầu tiên mà người chơi đu cách vị trí cân bằng 2 mét (tính chính xác đến $\frac{1}{100}$ giây).

38. Giải các phương trình sau :

a) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$; b) $(\tan x + \cot x)^2 - (\tan x + \cot x) = 2$;

c) $\sin x + \sin^2 \frac{x}{2} = 0{,}5$.

39. Chứng minh rằng các phương trình sau đây vô nghiệm :

a) $\sin x - 2\cos x = 3$; b) $5\sin 2x + \sin x + \cos x + 6 = 0$.

Hướng dẫn b) : Đặt $\sin x + \cos x = t$.

40. Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng đã cho (khi cần tính gần đúng thì tính chính xác đến $\frac{1}{10}$ giây) :

a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 2,\ 0^\circ \le x \le 360^\circ$;

b) $\tan x + 2\cot x = 3,\ 180^\circ \le x \le 360^\circ$.

41. Giải các phương trình sau :

a) $3\sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x = 0$;

b) $3\sin^2 2x - \sin 2x \cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$;

c) $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$.

42. Giải các phương trình sau :

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

b) $\sin x = \sqrt{2}\sin 5x - \cos x$;

c) $\dfrac{1}{\sin 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{2}{\sin 4x}$;

d) $\sin x + \cos x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I

43. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?

a) Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ có cùng tập xác định.

b) Các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$ có cùng tập xác định.

c) Các hàm số $y = \sin x$, $y = \tan x$ là những hàm số lẻ.

d) Các hàm số $y = \cos x$, $y = \cot x$ là những hàm số chẵn.

e) Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ cùng nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

f) Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-2\pi ; -\pi)$.

g) Trên mỗi khoảng mà hàm số $y = \tan x$ đồng biến thì hàm số $y = \cot x$ nghịch biến.

44. Xét hàm số $y = f(x) = \sin \pi x$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên chẵn m ta có $f(x + m) = f(x)$ với mọi x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1 ; 1]$.

c) Vẽ đồ thị của hàm số đó.

45. Đưa các biểu thức sau về dạng $C\sin(x + \alpha)$:

a) $\sin x + \tan\dfrac{\pi}{7}\cos x$;

b) $\tan\dfrac{\pi}{7}\sin x + \cos x$.

46. Giải các phương trình sau :

a) $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$;

b) $\tan\left(2x + 45^{\circ}\right)\tan\left(180^{\circ} - \frac{x}{2}\right) = 1$;

c) $\cos 2x - \sin^2 x = 0$;

d) $5\tan x - 2\cot x = 3$.

47. Giải các phương trình sau :

a) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

b) $2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

c) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x - 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$.

48. a) Chứng minh rằng $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

b) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ bằng cách biến đổi vế trái về dạng $C\sin(x + \alpha)$.

c) Giải phương trình $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$ bằng cách bình phương hai vế.

49. Giải phương trình

$$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}.$$

50. Cho phương trình $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2\cos x - \sin x} = \cos 2x$.

a) Chứng minh rằng $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ nghiệm đúng phương trình.

b) Giải phương trình bằng cách đặt $\tan x = t$ (khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong các bài từ 51 đến 63, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

51. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ là

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) $\frac{1}{2}$.

52. Giá trị bé nhất của biểu thức $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ là

(A) –2 ; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) –1 ; (D) 0.

53. Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin 2x + 3$ là

(A) [0 ; 1] ; (B) [2 ; 3] ; (C) [–2 ; 3] ; (D) [1 ; 5] .

54. Tập giá trị của hàm số $y = 1 - 2|\sin 3x|$ là

(A) [–1 ; 1] ; (B) [0 ; 1] ; (C) [–1 ; 0] ; (D) [–1 ; 3] .

55. Giá trị lớn nhất của biểu thức $y = \cos^2 x - \sin x$ là

(A) 2 ; (B) 0 ; (C) $\frac{5}{4}$; (D) 1.

56. Tập giá trị của hàm số $y = 4\cos 2x - 3\sin 2x + 6$ là

(A) [3 ; 10] ; (B) [6 ; 10] ; (C) [–1 ; 13] ; (D) [1 ; 11] .

57. Khi x thay đổi trong khoảng $\left(\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right)$ thì $y = \sin x$ lấy mọi giá trị thuộc

(A) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$; (B) $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; (C) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$; (D) [–1 ; 1] .

58. Khi x thay đổi trong nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right]$ thì $y = \cos x$ lấy mọi giá trị thuộc

(A) $\left[\frac{1}{2};1\right]$; (B) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; (C) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; (D) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

59. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ thuộc đoạn $[\pi ; 2\pi]$ là

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 0 ; (D) 3.

60. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ thuộc đoạn $[0 ; \pi]$ là

(A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 0.

61. Một nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ là

(A) $\frac{\pi}{12}$; (B) $\frac{\pi}{3}$; (C) $\frac{\pi}{8}$; (D) $\frac{\pi}{6}$.

62. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi ; 8\pi)$ là

(A) 1 ; (B) 3 ; (C) 2 ; (D) 4.

63. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi ; 4\pi]$ là

(A) 2 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6.

Chương 2 TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT



Trong khoa học cũng như trong cuộc sống, chúng ta thường phải xác định số phần tử của một tập hợp hoặc phải tính toán xem khả năng xảy ra của một biến cố ngẫu nhiên là bao nhiêu. Các kiến thức về **tổ hợp và xác suất** trong chương này sẽ bước đầu giúp chúng ta giải được một số bài toán đơn giản thuộc loại đó.

A. TỔ HỢP

§ 1 HAI QUY TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Bài toán đếm số phần tử của một tập hợp xuất hiện khá phổ biến trong khoa học cũng như trong cuộc sống. Nếu số phần tử của một tập hợp không nhiều thì ta có thể đếm trực tiếp được số phần tử của nó bằng cách liệt kê. Tuy nhiên, nếu số phần tử của một tập hợp rất lớn thì cách đếm trực tiếp là không khả thi.

Bài toán mở đầu

Mỗi người sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu. Giả sử mỗi mật khẩu gồm 6 kí tự, mỗi kí tự hoặc là một chữ số (trong 10 chữ số từ 0 đến 9) hoặc là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh) và mật khẩu phải có ít nhất là một chữ số. Hỏi có thể lập được tất cả bao nhiêu mật khẩu ?

H1 *Hãy viết một mật khẩu. Có thể liệt kê hết các mật khẩu được không ? Hãy ước đoán thử xem có khoảng bao nhiêu mật khẩu ?*

Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta hai quy tắc đếm cơ bản nhờ đó có thể tính chính xác số phần tử của một tập hợp mà không cần đếm trực tiếp.

1. Quy tắc cộng

Ví dụ 1. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến trong lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến ?

Giải

Nhà trường có hai phương án chọn. Phương án thứ nhất là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 11A, phương án này có 31 cách chọn. Phương án thứ hai là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 12B, phương án hai này có 22 cách chọn. Vậy nhà trường có cả thảy

$$31 + 22 = 53 \text{ cách chọn.}$$ □

Ta có quy tắc đếm sau đây gọi là **quy tắc cộng**.

> Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n + m$ cách.

Quy tắc cộng cho công việc với nhiều phương án được phát biểu như sau :

> Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1, n_2 cách thực hiện phương án A_2,... và n_k cách thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

Ví dụ 2. Giả sử từ tỉnh A đến tỉnh B có thể đi bằng các phương tiện : ô tô, tàu hoả, tàu thuỷ hoặc máy bay. Mỗi ngày có 10 chuyến ô tô, 5 chuyến tàu hoả, 3 chuyến tàu thuỷ và 2 chuyến máy bay. Theo quy tắc cộng, ta có $10 + 5 + 3 + 2 = 20$ sự lựa chọn để đi từ tỉnh A đến B. □

H2 *Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm : 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 10 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hoá. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài ?*

CHÚ Ý

Số phần tử của tập hợp hữu hạn X được kí hiệu là $|X|$ (hoặc $n(X)$).

Quy tắc cộng có thể được phát biểu dưới dạng sau :

Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn không giao nhau thì số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

2. Quy tắc nhân

Ví dụ 3. An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi (hình 2.1). Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường ?



Hình 2.1

Giải

Với mỗi cách đi từ nhà An đến nhà Bình sẽ có 6 cách đi tiếp từ nhà Bình đến nhà Cường. Vì có 4 cách đi từ nhà An đến Bình nên có cả thảy 4 . 6 = 24 cách đi từ nhà An qua nhà Bình đến nhà Cường. □

Ta có quy tắc đếm sau đây gọi là **quy tắc nhân**.

> Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

H3 *Nhãn mỗi chiếc ghế trong một hội trường gồm hai phần : phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau ?*

Quy tắc nhân cho công việc với nhiều công đoạn được phát biểu như sau :

> Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, ..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1 n_2 \ldots n_k$ cách.

Ví dụ 4. Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập $\{1, 2, ..., 9\}$, mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập $\{0, 1, ..., 9\}$. Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau ?

Giải

Ta có 26 cách chọn chữ cái để xếp ở vị trí đầu tiên. Tương tự có 9 cách chọn chữ số cho vị trí thứ hai và có 10 cách chọn chữ số cho mỗi vị trí trong bốn vị trí còn lại. Theo quy tắc nhân, ta có tất cả

$$26 \,.\, 9 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 10 = 2\,340\,000 \text{ (biển số xe).}$$ □

Ví dụ 5. Trở lại bài toán mở đầu. Hãy tính xem :

a) Có bao nhiêu dãy gồm 6 kí tự, mỗi kí tự hoặc là một chữ cái (trong bảng 26 chữ cái) hoặc là một chữ số (trong 10 chữ số từ 0 đến 9) ?

b) Có bao nhiêu dãy gồm 6 kí tự nói ở câu a) không phải là mật khẩu ?

c) Có thể lập được nhiều nhất bao nhiêu mật khẩu ?

Giải

a) Vì mỗi kí tự có 26 + 10 = 36 cách chọn nên theo quy tắc nhân, ta có thể lập được 36^6 dãy gồm 6 kí tự như vậy.

b) Dãy gồm 6 kí tự không phải là một mật khẩu nếu tất cả 6 kí tự đều là chữ cái. Vì mỗi kí tự có 26 cách chọn nên theo quy tắc nhân, số dãy gồm 6 kí tự không phải là một mật khẩu là 26^6.

c) Vậy có $36^6 - 26^6 = 1\,867\,866\,560$ mật khẩu. □

Câu hỏi và bài tập

1. Giả sử bạn muốn mua một áo sơ mi cỡ 39 hoặc 40. Áo cỡ 39 có 5 màu khác nhau, áo cỡ 40 có 4 màu khác nhau. Hỏi bạn có bao nhiêu sự lựa chọn (về màu và cỡ áo) ?

2. Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ?

3. Trong một trường THPT, khối 11 có 280 học sinh nam và 325 học sinh nữ.

a) Nhà trường cần chọn một học sinh ở khối 11 đi dự dạ hội của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

b) Nhà trường cần chọn hai học sinh trong đó có một nam và một nữ đi dự trại hè của học sinh thành phố. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn ?

4. Từ các chữ số 1, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 4 chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

b) Có 4 chữ số khác nhau ?

Bài đọc thêm

QUY TẮC CỘNG MỞ RỘNG

Quy tắc cộng cho ta công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau. Tuy nhiên trong nhiều bài toán tổ hợp, chúng ta phải tính số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn A và B có giao khác $\varnothing$. Trong trường hợp này, khi cộng số phần tử của A với số phần tử của B, thì số phần tử của $A \cap B$ sẽ được tính hai lần. Thành thử, ở kết quả phải bớt đi số phần tử của $A \cap B$. Ta có quy tắc cộng mở rộng sau đây :

Cho hai tập hợp hữu hạn bất kì A và B. Khi đó số phần tử của $A \cup B$ bằng số phần tử của A cộng với số phần tử của B rồi trừ đi số phần tử của $A \cap B$, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Ví dụ. Trong một trường THPT, khối 11 có : 160 học sinh tham gia câu lạc bộ Tin học, 140 học sinh tham gia câu lạc bộ Ngoại ngữ, 50 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ và 100 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ nêu trên. Hỏi khối 11 ở trường đó có bao nhiêu học sinh ?

Giải

Gọi tập hợp học sinh khối 11 ở trường THPT tham gia câu lạc bộ Tin học và câu lạc bộ Ngoại ngữ lần lượt là A và B.

Khi đó tập hợp học sinh khối 11 ở trường đó tham gia câu lạc bộ (Tin học hoặc Ngoại ngữ) là $A \cup B$.

Theo bài ra ta có $|A| = 160$, $|B| = 140$, $|A \cap B| = 50$.

Theo quy tắc cộng mở rộng, số học sinh khối 11 tham gia câu lạc bộ (Tin học hoặc Ngoại ngữ) là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 160 + 140 - 50 = 250.$$

Vậy khối 11 ở trường đó có 250 + 100 = 350 (học sinh). □

§ 2 HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

1. Hoán vị

a) Hoán vị là gì ?

Ví dụ 1. Ba vận động viên An, Bình và Châu chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì các khả năng sau đây đều có thể xảy ra :

Giải	**Các kết quả có thể**					
Nhất	An	An	Bình	Bình	Châu	Châu
Nhì	Bình	Châu	An	Châu	An	Bình
Ba	Châu	Bình	Châu	An	Bình	An

Kết quả cuộc thi chạy là một danh sách gồm ba người xếp theo thứ tự nhất, nhì, ba. Danh sách này gọi là *một hoán vị* của tập hợp {An, Bình, Châu}. Nếu kí hiệu tập hợp {An, Bình, Châu} là $\{a, b, c\}$ thì tập này có tất cả sáu hoán vị là (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).



Một cách tổng quát, ta có

> Cho tập hợp A có n $(n \geq 1)$ phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một **hoán vị** các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

H1 *Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Hãy viết tám hoán vị của A.*

b) Số các hoán vị

Bài toán đặt ra là : Nếu tập hợp A có n phần tử thì có tất cả bao nhiêu hoán vị của A ?

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử. Ta có

ĐỊNH LÍ 1

> Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là
>
> $$P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1.$$

Chứng minh

Việc sắp xếp thứ tự n phần tử của A là một công việc gồm n công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất, công đoạn 2 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ hai, công đoạn 3 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ ba, ..., công đoạn n là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ n. Ở công đoạn 1 ta có thể chọn bất kì phần tử nào trong n phần tử của A nên có n cách thực hiện. Sau khi chọn xong phần tử xếp vào vị trí thứ nhất, ở công đoạn 2 ta có thể chọn bất kì phần tử nào trong $n-1$ phần tử còn lại của A để xếp vào vị trí thứ hai nên có $n-1$ cách thực hiện. Tiếp tục như vậy ở bước 3 ta có $n-2$ cách thực hiện, ..., và ở bước thứ n (bước cuối cùng) ta chỉ còn 1 cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có cả thảy $n(n-1)(n-2)...1 = n!$ cách sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A, tức là có $n!$ hoán vị. □

Ví dụ 2. Một đoàn khách du lịch dự định đến tham quan bảy địa điểm A, B, C, D, E, G và H ở thủ đô Hà Nội. Họ đi tham quan theo một thứ tự nào đó, chẳng hạn $B \to A \to C \to E \to D \to G \to H$. Như vậy, mỗi cách chọn thứ tự các địa điểm tham quan là một hoán vị của tập $\{A, B, C, D, E, G, H\}$. Thành thử, đoàn khách có tất cả $7! = 5040$ cách chọn. □

H2 *Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số khác nhau ?*

2. Chỉnh hợp

a) Chỉnh hợp là gì ?

Ví dụ 3. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét.

Mỗi danh sách có xếp thứ tự 5 cầu thủ được gọi là một *chỉnh hợp* chập 5 của 11 cầu thủ.

Một cách tổng quát, ta có

> Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

H3 *Cho tập hợp* $A = \{a, b, c\}$. *Hãy viết tất cả các chỉnh hợp chập 2 của A.*

Nhận xét

Hai chỉnh hợp khác nhau khi và chỉ khi hoặc có ít nhất một phần tử của chỉnh hợp này mà không là phần tử của chỉnh hợp kia, hoặc các phần tử của hai chỉnh hợp giống nhau nhưng được sắp xếp theo thứ tự khác nhau.

b) Số các chỉnh hợp

Ví dụ 4. Trở lại ví dụ 3, hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách 5 cầu thủ.

Giải

Huấn luyện viên của mỗi đội có thể chọn một trong 11 cầu thủ để đá quả đầu tiên. Tiếp theo có 10 cách chọn cầu thủ đá quả thứ hai, rồi có 9 cách chọn cầu thủ đá quả thứ ba, rồi lại có 8 cách chọn cầu thủ đá quả thứ tư và cuối cùng có 7 cách chọn cầu thủ đá quả thứ năm. Theo quy tắc nhân, huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có

$$11 . 10 . 9 . 8 . 7 = 55440 \text{ cách chọn.}$$ □

Bài toán tổng quát đặt ra là : Cho một tập hợp có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k của tập hợp đó ?

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử được kí hiệu là A_n^k.

ĐỊNH LÍ 2

> Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \leq k \leq n)$ là
>
> $$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1). \quad (1)$$

Chứng minh

Việc lập một chỉnh hợp chập k của tập hợp có n phần tử được coi như một công việc gồm k công đoạn. Công đoạn 1 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ nhất. Công đoạn 2 là chọn phần tử xếp vào vị trí thứ hai, ... Công đoạn k là

chọn phần tử xếp vào vị trí thứ k. Vì tập hợp có n phần tử nên công đoạn 1 có n cách thực hiện. Sang công đoạn 2 chỉ còn $n - 1$ phần tử chưa chọn cho nên có $n - 1$ cách thực hiện. Tương tự công đoạn 3 có $n - 2$ cách chọn, ... và ở công đoạn cuối (công đoạn thứ k) ta có $n - k + 1$ cách thực hiện. Theo quy tắc nhân, ta có $n(n - 1)(n - 2)...(n - k + 1)$ cách lập ra một chỉnh hợp chập k. Đó cũng chính là số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp gồm n phần tử. □

Nhận xét

Từ định nghĩa ta thấy một hoán vị của tập hợp n phần tử là một chỉnh hợp chập n của tập đó nên $\mathrm{A}_n^n = \mathrm{P}_n = n!$.

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này ?

Giải

Mỗi cặp sắp thứ tự gồm hai điểm (A, B) cho ta một vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B và ngược lại. Như vậy, mỗi vectơ có thể xem là một chỉnh hợp chập 2 của tập hợp 6 điểm đã cho. Thành thử số vectơ cần tìm là

$$\mathrm{A}_6^2 = 6 \,.\, 5 = 30.$$ □

CHÚ Ý

- Với $0 < k < n$ thì ta có thể viết công thức (1) dưới dạng

$$\mathrm{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

- Ta quy ước

$$0! = 1 \text{ và } \mathrm{A}_n^0 = 1.$$

Khi đó công thức (2) đúng cho cả $k = 0$ và $k = n$. Vậy công thức (2) đúng với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \le k \le n$.

3. Tổ hợp

a) Tổ hợp là gì ?

Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

Như vậy lập một tổ hợp chập k của A chính là lấy ra k phần tử của A (không quan tâm đến thứ tự).

H4 *Viết tất cả các tổ hợp chập 3 của tập $A = \{a, b, c, d\}$.*

b) Số các tổ hợp

Kí hiệu C_n^k (hoặc $\binom{n}{k}$) là số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử.

ĐỊNH LÍ 3

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \le k \le n)$ là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \quad (3)$$

Chứng minh

Mỗi cách sắp thứ tự các phần tử của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Nói cách khác, mỗi hoán vị của một tổ hợp chập k của A cho ta một chỉnh hợp chập k của A. Vậy từ một tổ hợp chập k của A ta lập được $k!$ chỉnh hợp chập k của A. Vậy ta có

$$A_n^k = C_n^k k! \text{ hay } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}. \qquad \square$$

CHÚ Ý

- Với $1 \le k \le n$, ta có thể viết công thức (3) dưới dạng

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4)$$

- Ta quy ước $C_n^0 = 1$ (coi $\varnothing$ là tổ hợp chập 0 của tập hợp có n phần tử). Với quy ước này công thức (4) cũng đúng với $k = 0$. Vậy công thức (4) đúng với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \le k \le n$.

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm 7 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh đều thuộc P ?

Giải

Với mỗi tập con gồm 3 điểm bất kì của P, ta tạo được một tam giác với các đỉnh là 3 điểm đó. Ngược lại, mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc P tương ứng với

một tập con gồm 3 điểm của P. Vậy số tam giác có 3 đỉnh thuộc P chính bằng số các tổ hợp chập 3 của tập P, tức là bằng

$$C_7^3 = \frac{7.6.5}{3!} = 35. \qquad \square$$

Trong một số bài toán đếm phức tạp hơn, ta cần phối hợp sử dụng các công thức về tổ hợp và quy tắc nhân.

Ví dụ 7. Trong một lớp có 20 học sinh nam và 15 học sinh nữ. Thầy giáo chủ nhiệm cần chọn 4 học sinh nam và 3 học sinh nữ đi tham gia chiến dịch "*Mùa hè xanh*" của Đoàn Thanh niên Cộng sản Hồ Chí Minh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Giải

Ta có $C_{20}^4 = \frac{20.19.18.17}{1.2.3.4} = 4845$ cách chọn 4 học sinh nam trong số 20 học sinh nam và có $C_{15}^3 = \frac{15.14.13}{1.2.3} = 455$ cách chọn 3 học sinh nữ trong số 15 học sinh nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là

$$4845 \,.\, 455 = 2\,204\,475. \qquad \square$$

4. Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

a) Tính chất 1

> Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Chứng minh

Ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Do đó $C_n^k = C_n^{n-k}$. $\square$

b) Tính chất 2 (hằng đẳng thức Pa-xcan)

> Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Khi đó
>
> $$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Chứng minh

Ta có $\quad C_n^{k-1} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+2)}{(k-1)!}, \quad C_n^k = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$

Vậy

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)...(n-k+1) + kn(n-1)...(n-k+2)}{k!}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-k+2)(n-k+1+k)}{k!}$$

$$= \frac{(n+1)n...(n-k+2)}{k!} = C_{n+1}^k. \qquad \square$$

Câu hỏi và bài tập

5. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng đá có 5 đội bóng ? (Giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau).

6. Giả sử có 8 vận động viên tham gia chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba ?

7. Trong mặt phẳng cho một tập hợp P gồm n điểm. Hỏi :

a) Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?

b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối thuộc P ?

8. Trong một Ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người vào ban thường vụ.

a) Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

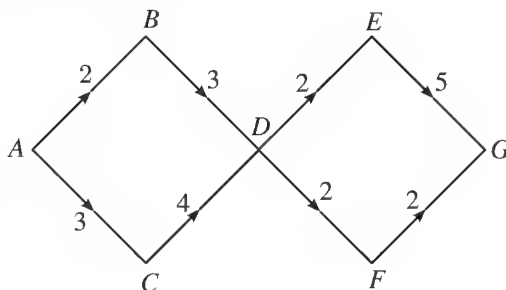
b) Nếu cần chọn 3 người vào ban thường vụ với các chức vụ : Bí thư, Phó Bí thư, Uỷ viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn ?

Luyện tập

9. Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời. Hỏi bài thi đó có bao nhiêu phương án trả lời ?

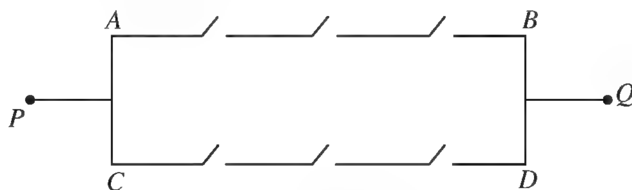
10. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số và chia hết cho 5 ?

11. Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên một cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh (h. 2.2). Hỏi có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G ?



Hình 2.2

12. Xét sơ đồ mạng điện ở hình 2.3 có 6 công tắc khác nhau, trong đó mỗi công tắc có 2 trạng thái đóng và mở.



Hình 2.3

Hỏi có bao nhiêu cách đóng - mở 6 công tắc để mạng điện thông mạch từ P đến Q (tức là có dòng điện từ P đến Q) ?

13. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau.

a) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra 4 người điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể ?

14. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có bốn giải : 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi :

a) Có bao nhiêu kết quả có thể ?

b) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất ?

c) Có bao nhiêu kết quả có thể, nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải ?

15. Một tổ có 8 em nam và 2 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong tổ tham dự cuộc thi học sinh thanh lịch của trường. Yêu cầu trong các em được chọn, phải có ít nhất một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

16. Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Người ta cần chọn ra 5 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 5 em được chọn, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

§ 3 NHỊ THỨC NIU-TƠN

1. Công thức nhị thức Niu-tơn

Ta đã biết các hằng đẳng thức

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^2$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_2^0$; $2 = C_2^1$; $1 = C_2^2$ tức là $(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$.

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^3$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_3^0$; $3 = C_3^1$; $3 = C_3^2$; và $1 = C_3^3$ tức là $(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng :

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \text{ (quy ước } a^0 = b^0 = 1).$$

Công thức này được gọi là **công thức nhị thức Niu-tơn** (gọi tắt là **nhị thức Niu-tơn**).

Ví dụ 1. Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển $(x + y)^{25}$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niu-tơn, hệ số này là $C_{25}^{13} = \dfrac{25!}{13!.12!} = 5200300$. □

Ví dụ 2. Tìm hệ số của x^3 trong khai triển $(3x - 4)^5$.

Giải

Ta có $(3x - 4)^5 = (3x + (-4))^5$. Theo công thức nhị thức Niu-tơn, số hạng chứa x^3 là $C_5^2(3x)^3.(-4)^2$. Vậy hệ số của x^3 là $10 . 3^3 . (-4)^2 = 4320$. □

H1 *Tìm hệ số của* x^2 *trong khai triển* $(3x - 4)^5$.

Ví dụ 3. Viết khai triển $(x - 2)^6$.

Giải

Theo công thức nhị thức Niu-tơn

$$(x-2)^6 = (-2+x)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k(-2)^{6-k}x^k = \sum_{k=0}^{6} a_k x^k \text{ với } a_k = C_6^k(-2)^{6-k}.$$

Tính theo công thức này, ta có

$a_0 = 64$; $a_1 = 6.(-2)^5 = -192$;

$a_2 = 15 . 2^4 = 240$; $a_3 = 20.(-2)^3 = -160$;

$a_4 = 15 . 2^2 = 60$; $a_5 = 6.(-2) = -12$; $a_6 = 1$.

Vậy $(x-2)^6 = x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$. □

Ví dụ 4. Gọi T là số các tập con (kể cả tập rỗng) của một tập hợp có n phần tử. Chứng minh rằng $T = 2^n$.

Giải

Với mỗi số nguyên k $(1 \leq k \leq n)$, số tập con có k phần tử của tập hợp có n phần tử là C_n^k. Vì có đúng một tập con (tập rỗng) có 0 phần tử và $C_n^0 = 1$ nên

$$T = \sum_{k=0}^{n} C_n^k. \quad (1)$$

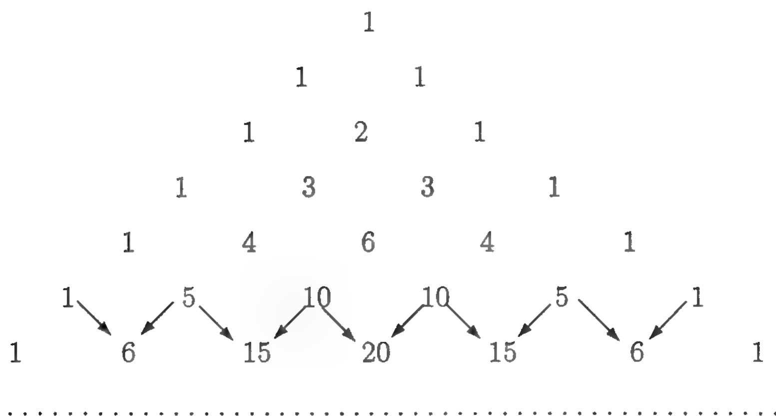
Trong công thức nhị thức Niu-tơn đặt $a = b = 1$, ta được

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $T = 2^n$. □

2. Tam giác Pa-xcan

Trên đây ta thấy muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được nhờ công thức (4) ở §2. Ngoài ra còn có thể tìm được chúng bằng cách sử dụng bảng số sau đây :



. . . .

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và được người ta gọi là **tam giác Pa-xcan**.

Tam giác Pa-xcan được lập theo quy luật sau :

– Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.

– Nếu biết hàng thứ n ($n \geq 1$) thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Chẳng hạn, khi có hàng thứ năm ta thiết lập hàng thứ sáu như sau : Theo thứ tự từ trái sang phải, ta lấy $1 + 5 = 6$ và viết số 6 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 1 và số 5 ; lấy $5 + 10 = 15$ và viết số 15 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 5 và số 10 ; lấy $10 + 10 = 20$ và viết số 20 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 10 và số 10 ; lấy $10 + 5 = 15$ và viết số 15 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 10 và

số 5 ; lấy 5 + 1 = 6 và viết số 6 xuống hàng dưới ở vị trí giữa số 5 và số 1. Cuối cùng viết số 1 ở đầu và cuối hàng (xem bảng số trên).

H2 *Điền tiếp tục các số vào các hàng thứ bảy và thứ tám trong bảng số trên.*

Nhận xét

Xét hàng thứ nhất, ta có

$$1 = C_1^0, \quad 1 = C_1^1.$$

Ở hàng thứ hai, ta có

$$1 = C_2^0, \quad 2 = C_2^1, \quad 1 = C_2^2.$$

Ở hàng thứ ba, ta có

$$1 = C_3^0, \quad 3 = C_3^1, \quad 3 = C_3^2, \quad 1 = C_3^3.$$

Một cách tổng quát, từ tính chất 2 của số C_n^k (hằng đẳng thức Pa-xcan) và cách thiết lập tam giác Pa-xcan, ta có

> Các số ở hàng thứ n trong tam giác Pa-xcan là dãy gồm $n + 1$ số
>
> $$C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, C_n^n.$$

Câu hỏi và bài tập

17. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x - 3y)^{200}$.

18. Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x + y)^{13}$.

19. Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(1 + x)^{11}$.

20. Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(2 - x)^{19}$.

Luyện tập

21. Khai triển $(3x + 1)^{10}$ cho tới x^3.

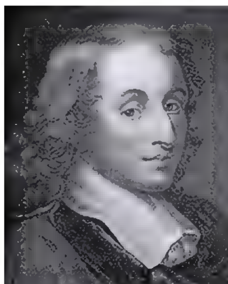
22. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(3 - 2x)^{15}$.

23. Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển của $(x^3 + xy)^{15}$.

24. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.



MỘT SỐ MẨU CHUYỆN VỀ NHÀ TOÁN HỌC PA-XCAN (PASCAL)


Blaise Pascal (1623-1662)

1. Hồi nhỏ Pa-xcan rất ham mê Hình học. Nhưng vì Pa-xcan rất yếu nên cha ông không muốn cho ông học Toán. Cha ông giấu hết các sách vở và những gì liên quan tới Toán. Thế là Pa-xcan phải tự mày mò xây dựng nên môn Hình học cho riêng mình. Ông vẽ các hình và tự đặt tên cho chúng. Ông gọi đường thẳng là "cây gậy", đường tròn là "cái bánh xe", hình tam giác là "thước thợ", hình chữ nhật là "mặt bàn".... Ông đã tìm ra và chứng minh được rất nhiều định lí của Hình học trong đó có định lí : "Tổng các góc của một thước thợ bằng nửa tổng các góc của một mặt bàn". Năm ấy Pa-xcan mới 12 tuổi.

2. Năm 16 tuổi, Pa-xcan công bố một công trình toán học : "Về thiết diện của đường cônic", trong đó ông đã chứng minh một định lí nổi tiếng (sau này mang tên ông) và gọi đó là "Định lí về lục giác thần kì". Ông rút ra 400 hệ quả từ định lí này. Nhà toán học và triết học vĩ đại lúc bấy giờ là Đề-các (Descartes) đánh giá rất cao công trình toán học này và nói rằng : "Tôi không thể tưởng tượng nổi một người đang ở tuổi thiếu niên mà lại có thể viết được một tác phẩm lớn như vậy".

3. Năm 17 tuổi, thấy cha (một kế toán) phải làm nhiều tính toán vất vả, Pa-xcan đã nảy ra ý định chế tạo một chiếc máy tính. Sau 5 năm lao động căng thẳng miệt mài, ông đã chế tạo xong chiếc máy tính làm được bốn phép tính cộng, trừ, nhân, chia, tuy rằng chưa nhanh lắm. *Đó là chiếc máy tính đầu tiên trong lịch sử nhân loại.* Để ghi nhớ công lao này, tên của ông đã được đặt cho một ngôn ngữ lập trình, là ngôn ngữ lập trình Pa-xcan.

4. Vào năm 1651, khi Pa-xcan 28 tuổi và được cả châu Âu tôn vinh là thần đồng, ông nhận được một bức thư của nhà quý tộc Pháp Đờ Mê-rê (De Méré) nhờ ông giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong các trò chơi đánh bạc. Pa-xcan đã "toán học hoá" các trò chơi cờ bạc này, nâng lên thành những bài toán phức tạp hơn và trao đổi vấn đề này với nhà toán học Phéc-ma. Những cuộc trao đổi đó đã khai sinh ra *Lí thuyết xác suất* – Lí thuyết toán học về các hiện tượng ngẫu nhiên.

5. Sau khi cha mất, chị gái bỏ đi tu, lại thêm ốm đau bệnh tật, Pa-xcan chán chường tất cả. Ông bỏ Toán học, đắm chìm vào những suy tư về tín ngưỡng và nghiên cứu Thần học. Vào một đêm đầu mùa xuân năm 1658, một cơn đau răng dữ dội làm Pa-xcan không ngủ được. Để quên đau, ông tập trung suy nghĩ về bài toán đường xyclôit, một bài toán khó đang thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học lúc đó. Kì lạ thay, ông đã giải được bài toán đó và sáng hôm sau cũng khỏi luôn bệnh đau răng. Ông nghĩ rằng đây là một thông điệp của Chúa nhắc nhở rằng ông không được quên và rời bỏ Toán học. Và thế là sau bốn năm đi theo con đường tín ngưỡng tôn giáo, Pa-xcan lại quay về với Toán học.

6. Không chỉ là một nhà toán học thiên tài, Pa-xcan còn là một nhà vật lí học nổi tiếng, là nhà văn, nhà tư tưởng lớn. Ngày nay người ta thường nhắc đến các câu nói của Pa-xcan như : "Con người chỉ là một cây sậy, một vật rất yếu đuối của tự nhiên, nhưng là một cây sậy biết suy nghĩ " và "Trái tim có những lí lẽ mà lí trí không giải thích được".

Pa-xcan mất khi mới 39 tuổi. Ông được coi là một trong những nhà bác học lớn của nhân loại.

B. XÁC SUẤT

Trong thực tiễn, chúng ta thường gặp những hiện tượng ngẫu nhiên. Đó là những hiện tượng (biến cố) mà chúng ta không thể dự báo một cách chắc chắn là nó xảy ra hay không xảy ra.

Lí thuyết xác suất là bộ môn toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Sự ra đời của lí thuyết xác suất bắt đầu từ những thư từ trao đổi giữa hai nhà toán học vĩ đại người Pháp là Pa-xcan (1623-1662) và Phéc-ma (1601-1665) xung quanh cách giải đáp một số vấn đề rắc rối nảy sinh trong các trò chơi cờ bạc mà một nhà quý tộc Pháp đặt ra cho Pa-xcan. Năm 1812, nhà toán học Pháp La-pla-xơ đã dự báo rằng "Môn khoa học bắt đầu từ việc xem xét các trò chơi may rủi này sẽ hứa hẹn trở thành một đối tượng quan trọng nhất của tri thức loài người".

Ngày nay lí thuyết xác suất đã trở thành một ngành toán học quan trọng, được ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên, khoa học xã hội, công nghệ, kinh tế, y học, sinh học,...

§ 4 BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Biến cố

a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Khi gieo một con súc sắc(*), số chấm trên mặt xuất hiện được coi là kết quả của việc gieo súc sắc. Ta nhận thấy rằng rất khó đoán trước được kết quả của mỗi lần gieo. Nó có thể là bất kì một con số nào trong tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Ta gọi việc gieo con súc sắc nói trên là một phép thử ngẫu nhiên.



(*) Con súc sắc là một khối lập phương mà sáu mặt lần lượt có 1, 2, ..., 6 chấm. Mặt có k chấm gọi là mặt k chấm.

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

– Kết quả của nó không đoán trước được ;

– Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

Ví dụ 1. Không gian mẫu của phép thử "Gieo một con súc sắc" là tập hợp

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ví dụ 2. Xét phép thử T là "Gieo hai đồng xu(*) phân biệt". Nếu dùng kí hiệu S để chỉ đồng xu lật sấp (mặt sấp xuất hiện) và N để chỉ đồng xu lật ngửa thì không gian mẫu của phép thử trên là



$$\Omega = \{SN, SS, NN, NS\}.$$

H1 *Cho phép thử T là "Gieo ba đồng xu phân biệt". Hãy cho biết không gian mẫu của phép thử đó.*

b) Biến cố

Ví dụ 3. Giả sử T là phép thử "Gieo một con súc sắc".

Không gian mẫu là $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Xét biến cố (hay sự kiện) A : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số chẵn". Ta thấy việc xảy ra hay không xảy ra biến cố A tuỳ thuộc vào kết quả của T. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T là 2, hoặc 4, hoặc 6. Các kết quả này được gọi là các kết quả thuận lợi cho A. Do đó biến cố A được mô tả bởi tập hợp $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$, đó là một tập con của Ω.

Biến cố A được gọi là biến cố liên quan đến phép thử T.

(*) Đồng xu là đồng tiền kim loại có hai mặt, trên một mặt có ghi giá trị của đồng tiền : người ta thường gọi đó là mặt ngửa. Mặt kia là mặt sấp.

Một cách tổng quát :

> Biến cố A **liên quan đến phép thử** T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tuỳ thuộc vào kết quả của T.
>
> Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một **kết quả thuận lợi cho** A.
>
> Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A. Khi đó người ta nói **biến cố** A **được mô tả bởi tập** Ω_A.

H2 *Xét biến cố B : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số lẻ" và biến cố C : "Số chấm trên mặt xuất hiện là một số nguyên tố". Hãy viết ra tập hợp* Ω_B *mô tả biến cố B và tập hợp* Ω_C *mô tả biến cố C.*

– *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

– *Biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Rõ ràng không có một kết quả thuận lợi nào cho biến cố không thể. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$ và được kí hiệu là $\varnothing$.

2. Xác suất của biến cố

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói về biến cố ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hoá các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hay bằng 1 gọi là *xác suất của biến cố đó*. Xác suất của biến cố A được kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$. Nó đo lường khả năng khách quan sự xuất hiện của biến cố A.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất

Ví dụ 4. Giả sử T là phép thử "Gieo hai con súc sắc". Kết quả của T là cặp số $(x ; y)$, trong đó x và y tương ứng là kết quả của việc gieo con súc sắc thứ nhất và thứ hai. Các kết quả có thể xảy ra của T được cho trong bảng sau đây :

x \ $(x ; y)$ \ y	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

Không gian mẫu của T là $\Omega = \{(1 ; 1), (2 ; 1), (3 ; 1), (4 ; 1), (5 ; 1), (6 ; 1), ..., (1 ; 6), (2 ; 6), (3 ; 6), (4 ; 6), (5 ; 6), (6 ; 6)\}$. Phép thử T có 36 kết quả có thể. Nếu con súc sắc được chế tạo cân đối thì các mặt của con súc sắc đều có cùng khả năng xuất hiện. Ta nói 36 kết quả của T là *đồng khả năng*.

Xét biến cố A : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc là 7". Tập con Ω_A các kết quả thuận lợi cho A là

$$\Omega_A = \{(1 ; 6), (2 ; 5), (3 ; 4), (4 ; 3), (5 ; 2), (6 ; 1)\}.$$

Khi đó tỉ số $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ được coi là xác suất của A. □

Một cách tổng quát :

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì **xác suất** của A là một số, kí hiệu là $P(A)$, được xác định bởi công thức

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}.$$

Như vậy, việc tính xác suất của biến cố A trong trường hợp này được quy về việc đếm số kết quả có thể của phép thử T và số kết quả thuận lợi cho A.

CHÚ Ý

Từ định nghĩa trên ta suy ra

- $0 \leq P(A) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$.

Ví dụ 5. Một vé xổ số có 4 chữ số. Khi quay số, nếu vé bạn mua có số trùng hoàn toàn với kết quả thì bạn trúng giải nhất. Nếu vé bạn mua có đúng 3 chữ số trùng với 3 chữ số của kết quả (kể cả vị trí) thì bạn trúng giải nhì. Bạn An mua một vé xổ số.

a) Tính xác suất để An trúng giải nhất.

b) Tính xác suất để An trúng giải nhì.

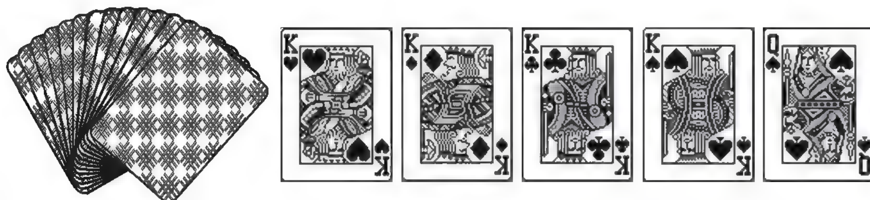
Giải

a) Số kết quả có thể là $10^4 = 10\,000$ và chỉ có một kết quả trùng với số vé của An. Do đó xác suất trúng giải nhất của An là $\frac{1}{10000} = 0,0001$.

b) Giả sử số vé của An là $\overline{abcd}$. Các kết quả trùng với đúng 3 chữ số của An là $\overline{abct}$ $(t \neq d)$ hoặc $\overline{abtd}$ $(t \neq c)$ hoặc $\overline{atcd}$ $(t \neq b)$ hoặc $\overline{tbcd}$ $(t \neq a)$. Vì mỗi trường hợp trên đều có 9 khả năng nên có 9 + 9 + 9 + 9 = 36 kết quả ở đó vé của An trúng giải nhì. Do đó xác suất trúng giải nhì của An là $\frac{36}{10000} = 0,0036$. □

Ví dụ 6. Một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài chia thành bốn chất : rô, cơ (màu đỏ), pích và nhép (màu đen). Mỗi chất có 13 quân bài là : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A (đọc là át). Bốn quân 2 (gồm 2 rô, 2 cơ, 2 pích và 2 nhép) làm thành một bộ 2 ; bốn quân 3 (gồm 3 rô, 3 cơ, 3 pích và 3 nhép) làm thành một bộ 3 ; ... ; bốn quân át (gồm át rô, át cơ, át pích và át nhép) làm thành một bộ át.

Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài đó ta có một bộ.



Giải

Số kết quả có thể là C_{52}^5. Số kết quả trong đó có một bộ 2 bằng số cách chọn một quân bài trong số 52 – 4 = 48 quân còn lại (không phải là quân 2). Vậy có 48 kết quả trong đó có một bộ 2. Tương tự có 48 kết quả trong đó có một bộ 3 ; ... ; có 48 kết quả trong đó có một bộ át. Vì có tất cả 13 bộ, nên số kết quả trong đó có xuất hiện một bộ là 13 . 48 = 624. Do đó, xác suất cần tìm là

$$\frac{624}{C_{52}^5} \approx 0,00024.$$ □

b) Định nghĩa thống kê của xác suất

Trong định nghĩa cổ điển của xác suất, ta cần giả thiết phép thử T có một số hữu hạn các kết quả có thể và các kết quả này là đồng khả năng. Nhưng trong nhiều trường hợp, giả thiết đồng khả năng không được thoả mãn. Chẳng hạn khi gieo một con súc sắc không cân đối thì các mặt của con súc sắc không có cùng khả năng xuất hiện. Trong trường hợp đó ta sử dụng định nghĩa sau đây gọi là định nghĩa thống kê của xác suất.

Xét phép thử T và biến cố A liên quan đến phép thử đó. Ta tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T và thống kê xem biến cố A xuất hiện bao nhiêu lần.

> Số lần xuất hiện biến cố A được gọi là **tần số** của A trong N lần thực hiện phép thử T.
>
> Tỉ số giữa tần số của A với số N được gọi là **tần suất** của A trong N lần thực hiện phép thử T.

Người ta chứng minh được rằng khi số lần thử N càng lớn thì tần suất của A càng gần với một số xác định, số đó được gọi là **xác suất của A theo nghĩa thống kê** (số này cũng chính là $P(A)$ trong định nghĩa cổ điển của xác suất).

Như vậy, tần suất được xem như giá trị gần đúng của xác suất. Trong khoa học thực nghiệm, người ta thường lấy tần suất làm xác suất. Vì vậy tần suất còn được gọi là *xác suất thực nghiệm*.

Ví dụ 7. Nếu ta gieo một đồng xu cân đối thì xác suất xuất hiện mặt ngửa là 0,5. Buýp-phông (Buffon), nhà toán học người Pháp thế kỉ XVIII, đã thí nghiệm việc gieo đồng xu nhiều lần và thu được kết quả sau :

Số lần gieo	Tần số xuất hiện mặt ngửa	Tần suất xuất hiện mặt ngửa
4 040	2 048	0,5070
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Ví dụ 8. Một công ti bảo hiểm nhân thọ đã thống kê được trong 100 000 đàn ông 50 tuổi có 568 người chết trước khi bước sang tuổi 51 và trong 100 000 phụ nữ 50 tuổi có 284 người chết trước khi bước sang tuổi 51. Khi đó xác suất

thực nghiệm để một người đàn ông 50 tuổi chết trước khi bước sang tuổi 51 là $\frac{568}{100000} = 0{,}00568$ và xác suất thực nghiệm để một người phụ nữ 50 tuổi chết trước khi bước sang tuổi 51 là $\frac{284}{100000} = 0{,}00284$. □

H3 *Gieo con súc sắc 50 lần. Ghi lại kết quả của việc gieo này và tính tần suất xuất hiện mỗi mặt* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *chấm.*

Số chấm xuất hiện	**Tần số**	**Tần suất**
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Câu hỏi và bài tập

25. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 50.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Số được chọn là số nguyên tố". Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho A.

c) Tính xác suất của A.

d) Tính xác suất để số được chọn nhỏ hơn 4.

26. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để :

a) Số được chọn là số nguyên tố ;

b) Số được chọn chia hết cho 3.

27. Danh sách lớp của Hường được đánh số từ 1 đến 30. Hường có số thứ tự là 12. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Tính xác suất để Hường được chọn.

b) Tính xác suất để Hường không được chọn.

c) Tính xác suất để một bạn có số thứ tự nhỏ hơn số thứ tự của Hường được chọn.

28. Gieo hai con súc sắc cân đối.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc nhỏ hơn hoặc bằng 7". Liệt kê các kết quả thuận lợi cho A. Tính $\mathrm{P}(A)$.

c) Cũng hỏi như trên cho các biến cố B : "Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm" và C : "Có đúng một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm".

29. Chọn ngẫu nhiên 5 người có tên trong một danh sách 20 người được đánh số từ 1 đến 20. Tính xác suất để 5 người được chọn có số thứ tự không lớn hơn 10 (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Luyện tập

30. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh có tên trong một danh sách được đánh số thứ tự từ 001 đến 199. Tính xác suất để 5 học sinh này có số thứ tự :

a) Từ 001 đến 099 (tính chính xác đến hàng phần nghìn) ;

b) Từ 150 đến 199 (tính chính xác đến hàng phần vạn).

31. Một túi đựng 4 quả cầu đỏ, 6 quả cầu xanh. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu. Tính xác suất để trong bốn quả đó có cả quả màu đỏ và màu xanh.

32. Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kì diệu" có thể dừng lại ở một trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau.

33. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối. Tính xác suất để số chấm xuất hiện trên hai con súc sắc hơn kém nhau 2.



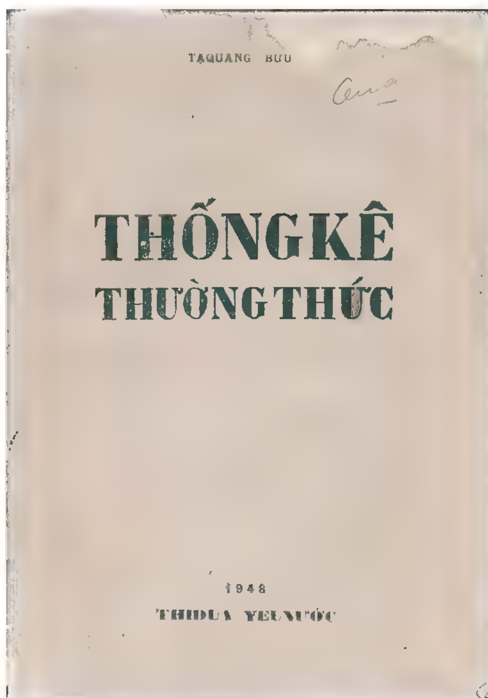
CUỐN SÁCH TIẾNG VIỆT VỀ XÁC SUẤT - THỐNG KÊ XUẤT BẢN LẦN ĐẦU TIÊN Ở NƯỚC TA


Tạ Quang Bửu
(1910 - 1986)

Vào năm 1948 cuốn sách "Thống kê thường thức" được xuất bản tại chiến khu Việt Bắc, căn cứ địa của cuộc kháng chiến chống Pháp (1945 - 1954) của dân tộc ta. Tác giả của nó là cố giáo sư Tạ Quang Bửu. Lúc đó ông đang giữ trọng trách Thứ trưởng Bộ Quốc phòng.

Cuốn sách dày 81 trang. Do điều kiện khó khăn của cuộc kháng chiến lúc đó nên nó được in trên giấy xấu, màu vàng nâu, sản xuất tại các xưởng thủ công trong núi rừng Việt Bắc. Cuốn sách trình bày các kiến thức cơ bản về xác suất, thống kê và những ứng dụng của môn học này trong quân sự. Trong Lời nói đầu, tác giả viết : "*Cuộc thi đua yêu nước đặt vấn đề thống kê ra một cách cấp bách. Thuật thống kê phải được phổ biến. Khoa học thống kê phải được nghiên cứu. Các cán bộ cao cấp phải biết dùng thống kê, các cán bộ trung cấp phải biết làm thống kê...*".

Giáo sư Tạ Quang Bửu là một nhà khoa học toàn năng, uyên bác, một cán bộ lãnh đạo có tầm nhìn chiến lược về các vấn đề khoa học và giáo dục của nước nhà, một nhân cách lớn với lối sống giản dị trong sáng. Trên cương vị Giám đốc trường Đại học Bách Khoa (1956 - 1961), Bộ trưởng Bộ Đại học và Trung học chuyên nghiệp (1965 - 1976) ông đã có những đóng góp quan trọng trong công cuộc đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học và xây dựng nền Đại học Việt Nam.



§ 5 CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

Trong tiết này ta luôn giả thiết các biến cố đang xét cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng.

1. Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **hợp của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Ví dụ 1. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Toán" và B là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn". Khi đó $A \cup B$ là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn hoặc giỏi Toán".

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là **hợp của** k **biến cố** đó.

b) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

Ví dụ 2. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh khối 10", B là biến cố "Bạn đó là học sinh khối 11". Khi đó A và B là hai biến cố xung khắc.

H1 *Hỏi hai biến cố A và B trong ví dụ 1 có phải là hai biến cố xung khắc hay không ?*

c) Quy tắc cộng xác suất

Để tính xác suất của biến cố hợp, ta cần đến quy tắc cộng xác suất sau đây :

> Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Ví dụ 3. Một chiếc hộp có chín thẻ đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn.

Giải

Kết quả nhận được là số chẵn khi và chỉ khi trong hai thẻ có ít nhất một thẻ đánh số chẵn (gọi tắt là thẻ chẵn). Gọi A là biến cố "Rút được một thẻ chẵn và một thẻ lẻ", B là biến cố "Cả hai thẻ được rút là thẻ chẵn". Khi đó biến cố "Tích hai số ghi trên hai thẻ là một số chẵn" là $A \cup B$.

Do hai biến cố A và B xung khắc, nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Vì có 4 thẻ chẵn và 5 thẻ lẻ nên

ta có

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_9^2} = \frac{20}{36},\ P(B) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}.$$

Do đó

$$P(A \cup B) = \frac{20}{36} + \frac{6}{36} = \frac{13}{18}.$$ □

Quy tắc cộng xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau :

> Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó
>
> $$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k). \qquad (2)$$

d) Biến cố đối

> Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A.

Nếu Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $\Omega \setminus \Omega_A$. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau.

CHÚ Ý

Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc. Tuy nhiên hai biến cố xung khắc chưa chắc là hai biến cố đối nhau. Chẳng hạn trong ví dụ 2, A và B là hai biến cố xung khắc nhưng không phải là hai biến cố đối nhau.

ĐỊNH LÍ

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (3)$$

Chứng minh

Kí hiệu $S = \overline{A} \cup A$. Do $\overline{A}$ và A là hai biến cố xung khắc nên theo công thức (1) ta có $P(S) = P(\overline{A}) + P(A)$. Rõ ràng biến cố S luôn luôn xảy ra nên S là biến cố chắc chắn. Vậy $P(S) = 1$. Suy ra

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$ □

H2 *Xét ví dụ 3. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số lẻ.*

Ví dụ 4. Một hộp đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi.

a) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi cùng màu.

b) Tính xác suất để chọn được 2 viên bi khác màu.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Chọn được 2 viên bi xanh", B là biến cố "Chọn được 2 viên bi đỏ", C là biến cố "Chọn được 2 viên bi vàng" và H là biến cố "Chọn được 2 viên bi cùng màu". Ta có $H = A \cup B \cup C$ và các biến cố A, B, C đôi một xung khắc. Vậy theo công thức (2), ta có

$$P(H) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Ta có $\quad P(A) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}, P(B) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{3}{36}, P(C) = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}.$

Vậy $\quad P(H) = \frac{6}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{18}.$

b) Biến cố "Chọn được 2 viên bi khác màu" chính là biến cố $\overline{H}$. Vậy theo công thức (3), ta có

$$P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$ □

2. Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

> Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là **giao của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Ví dụ 5. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Gọi A là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Toán", B là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi Văn". Khi đó AB là biến cố "Bạn đó là học sinh giỏi cả Văn và Toán".

Một cách tổng quát :

> Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2 ... A_k$, được gọi là **giao của** k **biến cố** đó.

b) Biến cố độc lập

> Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Ví dụ 6. Xét phép thử T là "Gieo một đồng xu liên tiếp hai lần". Gọi A là biến cố "Lần gieo thứ nhất đồng xu xuất hiện mặt sấp", B là biến cố "Lần gieo thứ hai đồng xu xuất hiện mặt ngửa". Khi đó A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

Nhận xét. Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

Một cách tổng quát :

> Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$; k biến cố này được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi nhóm biến cố tuỳ ý trong các biến cố đã cho không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

c) Quy tắc nhân xác suất

Để tính xác suất của biến cố giao, ta cần đến quy tắc nhân xác suất sau đây.

> Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì
> $$P(AB) = P(A)P(B). \quad (4)$$

Nhận xét. Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy : Nếu $P(AB) \neq P(A)P(B)$ thì hai biến cố A, B không độc lập với nhau. Ngược lại nếu có (4) thì A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

H3 *Cho hai biến cố A và B xung khắc.*

a) Chứng tỏ rằng $P(AB) = 0$.

b) Nếu $P(A) > 0$ và $P(B) > 0$ thì hai biến cố A và B có độc lập với nhau không ?

Ví dụ 7. Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,7. Hãy tính xác suất để :

a) Cả hai động cơ đều chạy tốt ;

b) Cả hai động cơ đều không chạy tốt ;

c) Có ít nhất một động cơ chạy tốt.

Giải

a) Gọi A là biến cố "Động cơ I chạy tốt", B là biến cố "Động cơ II chạy tốt", C là biến cố "Cả hai động cơ đều chạy tốt". Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập với nhau và $C = AB$. Theo công thức (4), ta có

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}8 \,.\, 0{,}7 = 0{,}56.$$

b) Gọi D là biến cố "cả hai động cơ đều không chạy tốt". Ta thấy $D = \overline{A}\,\overline{B}$. Hai biến cố $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập với nhau nên

$$P(D) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))\,(1 - P(B)) = 0{,}2 \,.\, 0{,}3 = 0{,}06.$$

c) Gọi K là biến cố "có ít nhất một động cơ chạy tốt", khi đó biến cố đối của K là biến cố D.

Do đó $\quad P(K) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$ □

Quy tắc nhân xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau :

> Nếu k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ độc lập với nhau thì
> $$P(A_1 A_2 \ldots A_k) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_k). \quad (5)$$

Câu hỏi và bài tập



34. Gieo ba đồng xu cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để :

a) Cả ba đồng xu đều sấp ;

b) Có ít nhất một đồng xu sấp ;

c) Có đúng một đồng xu sấp.

35. Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung là 0,2. Tính xác suất để trong ba lần bắn độc lập :

a) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng một lần ;

b) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất một lần.

36. Gieo hai đồng xu *A* và *B* một cách độc lập. Đồng xu *A* chế tạo cân đối. Đồng xu *B* chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp ba lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Tính xác suất để :

a) Khi gieo hai đồng xu một lần thì cả hai đồng xu đều ngửa ;

b) Khi gieo hai đồng xu hai lần thì hai lần cả hai đồng xu đều ngửa.

37. Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 5 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách với mỗi câu đều chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời không đúng cả 10 câu (tính chính xác đến hàng phần vạn).

Bài đọc thêm

SỬ DỤNG MÁY TÍNH BỎ TÚI TRONG TÍNH TOÁN TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Khi giải các bài toán tổ hợp và xác suất, chúng ta thường phải tính các biểu thức số có chứa các số dạng $n^k, n!, \mathrm{A}_n^k, \mathrm{C}_n^k$. Máy tính bỏ túi là một công cụ hỗ trợ đắc lực cho ta khi phải thực hiện các tính toán này.

Đối với máy tính CASIO *fx-500 MS* cách dùng như sau :

1) Để tính n^k ta lần lượt ấn

n [^] k [=]

Ví dụ 1. Tính 4^{10}. Ta lần lượt ấn

$$4 \boxed{\wedge}\ 10 \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 1048576.

2) Để tính $n!$ ta lần lượt ấn

$$n \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x!}$$

Ví dụ 2. Tính 8!. Ta lần lượt ấn

$$8 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{x!} \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 40320.

3) Để tính A_n^k ta lần lượt ấn

$$n \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{nPr}}\ k \boxed{=}$$

Ví dụ 3. Tính A_{15}^3. Ta lần lượt ấn

$$15 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{nPr}}\ 3 \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 2730.

4) Để tính C_n^k ta lần lượt ấn

$$n \boxed{\text{nCr}}\ k \boxed{=}$$

Ví dụ 4. Tính C_{14}^7. Ta lần lượt ấn

$$14 \boxed{\text{nCr}}\ 7 \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 3432.

Ví dụ 5. Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(x-2)^{19}$.

Hệ số đó là $C_{19}^{10}2^{10}$. Muốn tính số này ta lần lượt ấn

$$19 \boxed{\text{nCr}}\ 10 \boxed{\times}\ 2 \boxed{\wedge}\ 10 \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 94 595 072.

Ví dụ 6. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài đó ta có một bộ. (Xem ví dụ 6. §4).

Xác suất đó là $P = \dfrac{624}{C_{52}^5}$. Để tính số này ta lần lượt ấn

$$624 \boxed{\div}\ 52 \boxed{\text{nCr}}\ 5 \boxed{=}$$

Trên màn hình hiện kết quả 0,000240096. Vậy $P \approx 0{,}00024$.

Luyện tập

38. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 12 thẻ đánh số từ 1 đến 12. Từ mỗi hòm rút ngẫu nhiên một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ rút ra có ít nhất một thẻ đánh số 12.

39. Cho hai biến cố A và B với $P(A) = 0,3$; $P(B) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Hỏi hai biến cố A và B có

a) Xung khắc hay không ?

b) Độc lập với nhau hay không ?

40. Trong một trò chơi điện tử, xác suất để An thắng trong một trận là 0,4 (không có hoà). Hỏi An phải chơi tối thiểu bao nhiêu trận để xác suất An thắng ít nhất một trận trong loạt chơi đó lớn hơn 0,95 ?

41. Gieo hai con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc bằng 8.

42. Gieo ba con súc sắc cân đối một cách độc lập. Tính xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của ba con súc sắc bằng 9.



XÁC SUẤT VÀ SỐ π

1. Bằng một chiếc kim ta có thể tính gần đúng số π

Trên mặt phẳng ta kẻ các đường thẳng song song cách đều nhau một khoảng cách d. Lấy một chiếc kim có chiều dài là $\frac{d}{2}$. Tung chiếc kim đó một cách ngẫu nhiên lên mặt phẳng, nhà toán học Pháp Buýp-phông (Buffon) đã chỉ ra rằng xác suất để chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ là $p = \frac{1}{\pi}$.



Bây giờ ta tung chiếc kim này N lần và giả sử có k lần chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ. Vì tần suất $f = \frac{k}{N} \approx p = \frac{1}{\pi}$ nên ta suy ra $\pi \approx \frac{N}{k}$.

Buýp-phông đã thí nghiệm bằng cách tung một chiếc kim 2212 lần và thu được 704 lần chiếc kim cắt một trong các đường thẳng đã vẽ. Do đó

$$\pi \approx \frac{2212}{704} \approx 3{,}142045.$$

Sau đó, nhà toán học Piếc-xơn (Pearson) đã tung một chiếc kim nhiều lần hơn và tìm được $\pi \approx 3{,}1415929$. Nếu tăng số lần tung chiếc kim lên thì sẽ tính gần đúng số π với độ chính xác cao hơn.

2. Một tình huống khác có xuất hiện số π

Nếu ta chọn ngẫu nhiên hai số thực x và y trong khoảng $(0 ; 1)$ thì có thể chứng minh được rằng xác suất để ba số x, y và 1 là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn bằng $\frac{4-\pi}{4}$. Bạn hãy mời nhiều người (càng nhiều càng tốt) và yêu cầu mỗi người chọn lấy hai số dương trong khoảng $(0 ; 1)$. Sau đó, bạn yêu cầu mỗi người kiểm tra xem hai số đó và số 1 có là độ dài ba cạnh của tam giác nhọn không. Giả sử có n người nói "có" và m người nói "không". Vì tần suất f xấp xỉ xác suất nên

$$f = \frac{n}{n+m} \approx \frac{4-\pi}{4}. \text{ Từ đó } \pi \approx 4\left(1 - \frac{n}{n+m}\right) = \frac{4m}{n+m}.$$

Bạn không tin hãy thử thí nghiệm xem sao !

§ 6 BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

1. Khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc

Ví dụ 1. Gieo đồng xu 5 lần liên tiếp. Kí hiệu X là số lần xuất hiện mặt ngửa. Đại lượng X có các đặc điểm sau :

– Giá trị của X là một số thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$;

– Giá trị của X là ngẫu nhiên, không đoán trước được.

Ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc.

Một cách khái quát :

> Đại lượng X được gọi là một **biến ngẫu nhiên rời rạc** nếu nó nhận giá trị bằng số thuộc một tập hữu hạn nào đó và giá trị ấy là ngẫu nhiên, không dự đoán trước được.

2. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $\{ x_1, x_2, ..., x_n \}$. Để hiểu rõ hơn về X, ta thường quan tâm đến xác suất để X nhận giá trị x_k tức là các số $P(X = x_k) = p_k$ với $k = 1, 2, ..., n$.

Các thông tin về X như vậy được trình bày dưới dạng bảng sau đây :

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Bảng 1

Bảng 1 được gọi là **bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc** X.

Người ta chứng minh được rằng trong bảng 1, tổng các số ở dòng thứ hai bằng $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Ví dụ 2. Số vụ vi phạm luật giao thông trên đoạn đường A vào tối thứ bảy hàng tuần là một biến ngẫu nhiên rời rạc X. Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Bảng 2

Nhờ bảng 2 ta biết được chẳng hạn xác suất để tối thứ bảy trên đoạn đường A không có vụ vi phạm luật giao thông nào là 0,1 và xác suất để xảy ra nhiều nhất một vụ vi phạm luật giao thông là 0,1 + 0,2 = 0,3.

H1 *Tính xác suất để tối thứ bảy trên đoạn đường A :*

a) Có hai vụ vi phạm luật giao thông ;

b) Có nhiều hơn ba vụ vi phạm luật giao thông.

Ví dụ 3. Một túi đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Gọi X là số viên bi xanh trong 3 viên bi được chọn ra. Rõ ràng X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị trong tập $\{0, 1, 2, 3\}$.

Để lập bảng phân bố xác suất của X ta phải tính các xác suất $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ và $P(X = 3)$.

Số trường hợp có thể là $C_{10}^{3} = 120$.

Ta có $P(X = 0)$ là xác suất chọn được cả 3 viên bi đỏ. Số cách chọn 3 viên bi đỏ là $C_6^3 = 20$. Vậy $P(X = 0) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Ta có $P(X = 1)$ là xác suất để chọn được 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Ta có $C_4^1 = 4$ cách chọn 1 viên bi xanh và $C_6^2 = 15$ cách chọn 2 viên bi đỏ. Theo quy tắc nhân, ta có 4.15 = 60 cách chọn 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Vậy $P(X = 1) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. □

H2 *Hãy tính* $P(X = 2)$ *và* $P(X = 3)$ *rồi lập bảng phân bố xác suất của X.*

3. Kì vọng

ĐỊNH NGHĨA

Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. **Kì vọng** của X, kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i,$$

ở đó $p_i = P(X = x_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$.

Ý nghĩa : $E(X)$ là một số cho ta một ý niệm về độ lớn trung bình của X. Vì thế kì vọng $E(X)$ còn được gọi là giá trị trung bình của X.

Nhận xét. Kì vọng của X không nhất thiết thuộc tập các giá trị của X.

Ví dụ 4. Gọi X là số vụ vi phạm luật giao thông trong đêm thứ bảy ở đoạn đường A nói trong ví dụ 2. Tính $E(X)$.

Giải

Ta có $E(X) = 0 . 0{,}1 + 1 . 0{,}2 + 2 . 0{,}3 + 3 . 0{,}2 + 4 . 0{,}1 + 5 . 0{,}1 = 2{,}3$.

(Như vậy ở đoạn đường A mỗi tối thứ bảy có trung bình 2,3 vụ vi phạm luật giao thông). □

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

a) Phương sai

ĐỊNH NGHĨA

> Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
>
> **Phương sai** của X, kí hiệu là V(X), là một số được tính theo công thức
>
> $$\mathrm{V}(X) = (x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i,$$
>
> ở đó $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ và $\mu = \mathrm{E}(X)$.

Ý nghĩa : Phương sai là một số không âm. Nó cho ta một ý niệm về mức độ phân tán các giá trị của X xung quanh giá trị trung bình. Phương sai càng lớn thì độ phân tán này càng lớn.

b) Độ lệch chuẩn

ĐỊNH NGHĨA

> Căn bậc hai của phương sai, kí hiệu là $\sigma(X)$, được gọi là **độ lệch chuẩn** của X, nghĩa là
>
> $$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}.$$

Ví dụ 5. Gọi X là số vụ vi phạm luật giao thông vào tối thứ bảy nói trong ví dụ 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của X.

Giải

Từ ví dụ 4 ta có $\mu = \mathrm{E}(X) = 2{,}3$. Từ công thức tính phương sai, ta có

$$\mathrm{V}(X) = (0 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}1 + (1 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}2 + (2 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}3 + (3 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}2 + (4 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}1 + (5 - 2{,}3)^2 \,.\, 0{,}1 = 2{,}01.$$

Độ lệch chuẩn là $\sigma(X) = \sqrt{2{,}01} \approx 1{,}418$ □

CHÚ Ý

Có thể chứng minh được rằng

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2. \quad (1)$$

Trong thực hành, ta thường dùng công thức (1) để tính phương sai.

Ví dụ 6. Dùng công thức (1) để tính phương sai của số vụ vi phạm luật giao thông trong ví dụ 2, ta có

$$V(X) = 0^2.0,1 + 1^2.0,2 + 2^2.0,3 + 3^2.0,2 + 4^2.0,1 + 5^2.0,1 - (2,3)^2 = 2,01.$$

Câu hỏi và bài tập

43. Một cuộc điều tra được tiến hành như sau : Chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh trên đường và hỏi xem gia đình bạn đó có bao nhiêu người. Gọi X là số người trong gia đình bạn học sinh đó. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không ? Vì sao ?

44. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong số các gia đình có ba con. Gọi X là số con trai trong gia đình đó. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X (giả thiết rằng xác suất sinh con trai là 0,5).

45. Số ca cấp cứu ở một bệnh viện vào tối thứ bảy là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Biết rằng, nếu có hơn 2 ca cấp cứu thì phải tăng cường thêm bác sĩ trực.

a) Tính xác suất để phải tăng cường thêm bác sĩ trực vào tối thứ bảy.

b) Tính xác suất để xảy ra ít nhất một ca cấp cứu vào tối thứ bảy.

46. Số cuộc điện thoại gọi đến một tổng đài trong khoảng thời gian 1 phút vào buổi trưa (từ 12 giờ đến 13 giờ) là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,1

Tính xác suất để trong khoảng thời gian từ 12 giờ 30 phút đến 12 giờ 31 phút có nhiều hơn 2 cuộc gọi.

47. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 44 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

48. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 45 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

49. Tính kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc X trong bài tập 46 (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Bài đọc thêm

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC VÀ THỐNG KÊ

Xét dấu hiệu X với tập giá trị hữu hạn $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Giả sử trên một mẫu điều tra kích thước N về dấu hiệu X, ta thấy có n_i số liệu có giá trị x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tức là giá trị x_i có tần số n_i. Tần suất của giá trị x_i là $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Khi đó bảng phân bố tần suất của mẫu số liệu trên là

Giá trị x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Tần suất f	f_1	f_2	$\cdots$	f_n

Có thể coi dấu hiệu X nói trên là một biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Giả sử phân bố xác suất của X là

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Chúng ta đã biết rằng tần suất f_i là một giá trị gần đúng của xác suất p_i. Do đó *bảng phân bố tần suất của mẫu số liệu cho ta một "hình ảnh" gần đúng về bảng phân bố xác suất của X.*

Số trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \dfrac{n_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$.

Vì $f_i \approx p_i$ nên $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \approx \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \mathrm{E}(X)$.

Như vậy, *số trung bình của mẫu số liệu là một giá trị gần đúng của kì vọng của X.*

Tương tự, phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{N} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 f_i \approx \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \mathrm{V}(X)$$

ở đó $\mu = \mathrm{E}(X)$.

Vậy *phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là các giá trị gần đúng của phương sai và độ lệch chuẩn của X.*

Luyện tập

50. Chọn ngẫu nhiên 3 đứa trẻ từ một nhóm trẻ gồm 6 trai và 4 gái. Gọi X là số bé gái trong số 3 đứa trẻ được chọn. Lập bảng phân bố xác suất của X.

51. Số đơn đặt hàng đến trong một ngày ở một công ti vận tải là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

a) Tính xác suất để số đơn đặt hàng thuộc đoạn [1 ; 4].

b) Tính xác suất để có ít nhất 4 đơn đặt hàng đến công ti đó trong một ngày.

c) Tính số đơn đặt hàng trung bình đến công ti đó trong một ngày.

52. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,01	0,05	0,1	0,14	0,18	0,25	0,15	0,07	0,04	0,01

a) Tính $\mathrm{P}(2 < X < 7)$.

b) Tính $\mathrm{P}(X > 5)$.

53. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{3}{14}$

Tính E(X), V(X) và σ(X) (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

54. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	15	18	21	24
P	$\frac{3}{14}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{28}$

Tính E(X), V(X) và σ(X) (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II

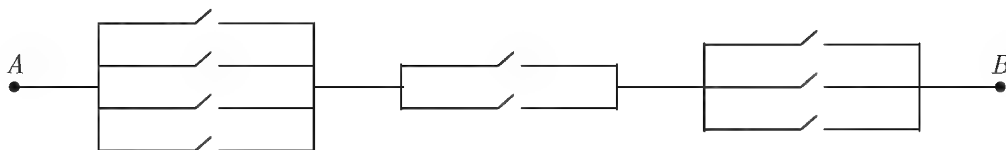
55. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có ba chữ số (không nhất thiết khác nhau) ?

56. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập nên bao nhiêu số chẵn có ba chữ số khác nhau ?

57. Xét sơ đồ mạng điện (h. 2.4) có 9 công tắc, trong đó mỗi công tắc có hai trạng thái đóng và mở.

a) Hỏi mạng điện có thể có bao nhiêu cách đóng - mở 9 công tắc trên ?

b) Hỏi mạng điện có bao nhiêu cách đóng - mở 9 công tắc trên để thông mạch từ A đến B (tức là có dòng điện đi từ A đến B) ?



Hình 2.4

58. Trong không gian cho tập hợp gồm 9 điểm trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tứ diện với các đỉnh thuộc tập hợp đã cho ?

59. Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào Uỷ ban Thường trực ?

b) Có bao nhiêu cách chọn Chủ tịch, Phó Chủ tịch và Thủ quỹ ?

60. Tìm hệ số của x^8y^9 trong khai triển của $(3x + 2y)^{17}$.

61. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên bé hơn 1000. Tính xác suất để số đó :

a) Chia hết cho 3 ;

b) Chia hết cho 5.

62. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có quân 2 rô, quân 3 pích, quân 6 cơ, quân 10 nhép và quân K cơ.

63. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 quân bài. Tính xác suất để trong 5 quân bài này có ít nhất một quân át (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

64. Có hai hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên hai tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 3.

65. Có ba hòm, mỗi hòm chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hòm một tấm thẻ. Tính xác suất để :

a) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra không nhỏ hơn 4 ;

b) Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ rút ra bằng 6.

66. Số lỗi đánh máy trên một trang sách là một biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	0	1	2	3	4	5
P	0,01	0,09	0,3	0,3	0,2	0,1

Tính xác suất để :

a) Trên trang sách có nhiều nhất 4 lỗi ;

b) Trên trang sách có ít nhất 2 lỗi.

67. Có hai túi : túi thứ nhất chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3 và túi thứ hai chứa bốn tấm thẻ đánh số 4, 5, 6, 8. Rút ngẫu nhiên từ mỗi túi một tấm thẻ rồi cộng hai số ghi trên hai tấm thẻ với nhau. Gọi X là số thu được.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính E(X).

68. Một nhóm có 7 người, trong đó gồm 4 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi X là số nữ trong 3 người được chọn.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính E(X) và V(X) (tính chính xác đến hàng phần trăm).

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong các bài từ 69 đến 73, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

69. Trong các số nguyên từ 100 đến 999, số các số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần (kể từ trái sang phải) bằng

(A) 120 ; (B) 168 ; (C) 204 ; (D) 216.

70. Một đội xây dựng gồm 10 công nhân, 3 kĩ sư. Để lập một tổ công tác, cần chọn một kĩ sư làm tổ trưởng, một công nhân làm tổ phó và 5 công nhân làm tổ viên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

(A) 3780 ; (B) 3680 ; (C) 3760 ; (D) 3520.

71. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau (chữ số đầu tiên phải khác 0) ?

(A) 1250 ; (B) 1260 ; (C) 1280 ; (D) 1270.

72. Hệ số của x^9 sau khi khai triển và rút gọn đa thức là

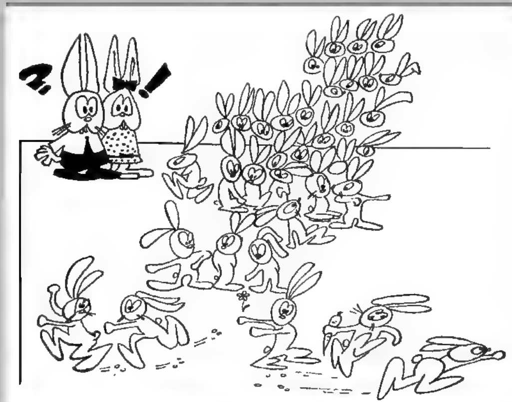
$$(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \cdots + (1+x)^{14}.$$

(A) 3001 ; (B) 3003 ; (C) 3010 ; (D) 2901.

73. Hai xạ thủ độc lập với nhau cùng bắn vào một tấm bia. Mỗi người bắn một viên. Xác suất bắn trúng của xạ thủ thứ nhất là 0,7 ; của xạ thủ thứ hai là 0,8. Gọi X là số viên đạn trúng bia. Tính kì vọng của X.

(A) 1,75 ; (B) 1,5 ; (C) 1,54 ; (D) 1,6.

Chương 3 DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN



Chương này giới thiệu một loại hàm số mới **- Dãy số**, và đồng thời giúp học sinh tìm hiểu một số vấn đề đơn giản xung quanh hai loại dãy số đặc biệt - **Cấp số cộng và cấp số nhân**. Cũng trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với một phương pháp chứng minh mới - *Phương pháp quy nạp toán học.*

Hi vọng rằng, việc vận dụng kiến thức trong chương để giải quyết các bài toán được đặt ra ở các môn học cũng như trong thực tế cuộc sống sẽ mang lại nhiều điều bổ ích và lí thú.

§ 1 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

1. Phương pháp quy nạp toán học

Trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học (số học, đại số, hình học, giải tích, ...), ta thường gặp những bài toán với yêu cầu chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của biến n.

Xét bài toán : *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có*

$$1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad (1)$$

H1 *a) Hãy kiểm tra đẳng thức* (1) *khi* $n = 1$.

b) Em có thể kiểm tra đẳng thức (1) *với mọi giá trị nguyên dương của* n *hay không ?*

Nhận thấy, ta có thể chứng minh được khẳng định sau :

"Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, nếu (1) đã đúng khi $n = k$ thì nó cũng đúng khi $n = k + 1$."

Điều đó có nghĩa là : "Nếu ta đã có

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \quad (2)$$

thì ta cũng sẽ có

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\text{"}.$$

Thật vậy, theo (2) ta có

$$1.2 + 2.3 + ... + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.$$

Nhờ việc kiểm nghiệm (1) đúng khi $n = 1$ và kết quả vừa chứng minh trên, ta có thể suy ra (1) đúng với mọi giá trị nguyên dương của n.

Thật vậy, vì (1) đúng khi $n = 1$ nên theo kết quả vừa chứng minh trên, nó cũng đúng khi $n = 1 + 1 = 2$. Tương tự như thế, vì đúng khi $n = 2$ nên nó sẽ đúng khi $n = 2 + 1 = 3$; và do đã đúng khi $n = 3$ nên nó phải đúng khi $n = 3 + 1 = 4$; ... . Tiếp tục quá trình suy luận đó, ta đi đến kết luận (1) đúng với mọi giá trị nguyên dương của n. Bài toán được giải quyết.

Một cách khái quát :

Để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n, ta thực hiện hai bước sau :

- **Bước 1** (*bước cơ sở*, hay *bước khởi đầu*). Chứng minh $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = 1$.

- **Bước 2** (*bước quy nạp*, hay *bước "di truyền"*). Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, xuất phát từ giả thiết $A(n)$ là một mệnh đề đúng khi $n = k$, chứng minh $A(n)$ cũng là một mệnh đề đúng khi $n = k + 1$.

Người ta gọi phương pháp chứng minh vừa nêu trên là *phương pháp quy nạp toán học* (hay còn gọi tắt là *phương pháp quy nạp*). Giả thiết được nói tới ở bước 2 gọi là *giả thiết quy nạp*.

2. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (3)$$

Giải

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, ta có

$$1^3 = 1 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}.$$

Như vậy, (3) đúng khi $n = 1$.

- Giả sử (3) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, tức là

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4},$$

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}.(k^2 + 4k + 4) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Vậy (3) đúng với mọi số nguyên dương n. □

H2 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có*

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

H3 *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có*

$$1^2 + 3^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

CHÚ Ý

Trong thực tế, ta còn gặp các bài toán với yêu cầu chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương $n \geq p$, trong đó p là một số nguyên dương cho trước. Trong trường hợp này, để giải quyết bài toán đặt ra bằng phương pháp quy nạp, ở bước 1 ta cần chứng minh $A(n)$ là mệnh đề đúng khi $n = p$ và ở bước 2, cần xét giả thiết quy nạp với k là số nguyên dương tuỳ ý lớn hơn hoặc bằng p.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$, ta luôn có

$$2^n > 2n + 1. \quad (4)$$

Giải

Ta sẽ giải bài toán bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 3$, ta có

$$2^n = 2^3 = 8 \quad \text{và} \quad 2n + 1 = 2.3 + 1 = 7.$$

Rõ ràng 8 > 7, và do đó (4) đúng khi $n = 3$.

- Giả sử (4) đúng khi $n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 3$, tức là

$$2^k > 2k + 1,$$

ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp, ta có

$$2^{k+1} = 2.2^k > 2(2k+1) = 4k+2 > 2k+3 = 2(k+1)+1.$$

Vậy (4) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$. □

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có đẳng thức sau :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có đẳng thức :

$$2^2 + 4^2 + ... + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có bất đẳng thức :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, ta luôn có đẳng thức sau :

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

5. Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Hãy chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

6. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta luôn có u_n chia hết cho 5.

7. Cho số thực $x > -1$. Chứng minh rằng

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

với mọi số nguyên dương n.

8. Một học sinh chứng minh mệnh đề "Với k là một số nguyên dương tuỳ ý, nếu $8^k + 1$ chia hết cho 7 thì $8^{k+1} + 1$ cũng chia hết cho 7" như sau :

Ta có : $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$. Từ đây và giả thiết "$8^k + 1$ chia hết cho 7", hiển nhiên suy ra $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7.

Hỏi từ chứng minh trên, bạn học sinh đó có thể kết luận được "$8^n + 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$" hay không ? Vì sao ?

§ 2 DÃY SỐ

1. Định nghĩa và ví dụ

Ở các lớp dưới, qua việc giải bài tập, ta đã làm quen với khái niệm dãy số. Khi đó, nói tới dãy số ta hiểu đó là kết quả thu được khi viết liên tiếp các số theo một quy tắc nào đó. Chẳng hạn, khi viết liên tiếp các luỹ thừa với số mũ tự nhiên của $-\frac{1}{2}$, theo thứ tự tăng dần của số mũ, ta được dãy số :

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^0, \left(\frac{-1}{2}\right)^1, \left(\frac{-1}{2}\right)^2, \left(\frac{-1}{2}\right)^3, \left(\frac{-1}{2}\right)^4, \left(\frac{-1}{2}\right)^5, \ldots \quad (1)$$

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n là số nằm ở vị trí thứ n (kể từ trái qua phải) của dãy số (1), ta có

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Điều đó cho thấy dãy số (1) thể hiện một quy tắc mà nhờ nó, ứng với mỗi số nguyên dương n, ta xác định được duy nhất một số thực u_n. Vì thế, ta có thể coi dãy số (1) là một hàm số xác định trên tập hợp các số nguyên dương.

ĐỊNH NGHĨA 1

Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (hay còn gọi tắt là **dãy số**).

Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một *số hạng* của dãy số ; $u(1)$ được gọi là *số hạng thứ nhất* (hay *số hạng đầu*) ; $u(2)$ được gọi là *số hạng thứ hai* ; ... .

Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1)$, $u(2)$, ... tương ứng bởi u_1, u_2, ...

Ví dụ 1. Hàm số $u(n) = \dfrac{1}{n+1}$, xác định trên tập $\mathbb{N}^*$, là một dãy số. Dãy số này có vô số số hạng :

$$u_1 = \frac{1}{2},\ u_2 = \frac{1}{3},\ u_3 = \frac{1}{4},\ \ldots .$$

H1 *Hãy xác định các số hạng thứ 9, thứ 99 và thứ 999 của dãy số ở ví dụ trên.*

Kí hiệu. Người ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), và gọi u_n là *số hạng tổng quát* của dãy số đó.

Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới *dạng khai triển :*

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots .$$

Chẳng hạn, có thể kí hiệu dãy số ở ví dụ 1 bởi $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$; và khi viết dãy số đó dưới dạng khai triển ta được :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots .$$

CHÚ Ý

Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên (m tuỳ ý thuộc $\mathbb{N}^*$) là một dãy số. Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng : u_1, u_2, ..., u_m) ; vì thế, người ta còn gọi nó là *dãy số hữu hạn* ; u_1 gọi là *số hạng đầu* và u_m gọi là *số hạng cuối*.

Ví dụ 2. Hàm số $u(n) = n^3$, xác định trên tập hợp $M = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, là một dãy số hữu hạn. Dãy số này có năm số hạng :

n	1	2	3	4	5
u_n	1	8	27	64	125

1 là *số hạng đầu* và 125 là *số hạng cuối*.

Viết dãy số trên dưới dạng khai triển ta được :

$$1, 8, 27, 64, 125.$$

2. Các cách cho một dãy số

Một dãy số được coi là xác định nếu ta biết cách tìm mọi số hạng của dãy số đó. Từ đó, người ta thường cho dãy số bằng một trong các cách sau :

***Cách 1 :** Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.*

Chẳng hạn : "Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$".

H2 *Hãy tìm các số hạng u_{33} và u_{333} của dãy số vừa nêu trên.*

***Cách 2 :** Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi* (hay còn nói : *Cho dãy số bằng quy nạp*).

Ví dụ 3. Xét dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 1$ và với mọi $n \geq 2$

$$u_n = 2u_{n-1} + 1. \qquad (2)$$

Rõ ràng, với cách cho như trên, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n) :

– Do u_1 đã biết nên áp dụng (2) cho $n = 2$ ta tìm được u_2

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \,.\, 1 + 1 = 3\ ;$$

– Vì biết u_2 nên áp dụng (2) cho $n = 3$ ta tìm được u_3

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \,.\, 3 + 1 = 7\ ;\ \ldots .$$

Tiếp tục quá trình trên ta sẽ tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (u_n).

Ví dụ 4. Xét dãy số (v_n) xác định bởi : $v_1 = -1$, $v_2 = 2$ và với mọi $n \geq 3$

$$v_n = v_{n-1} + 2v_{n-2}. \qquad (3)$$

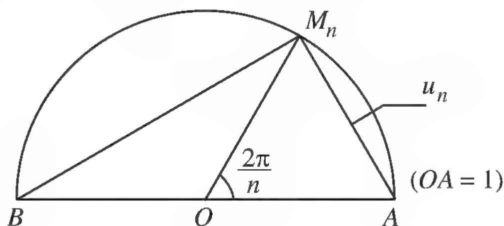
Phân tích tương tự như đối với dãy số (u_n) ở ví dụ 3, sẽ thấy : Với cách cho như trên, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của dãy số (v_n).

H3 *Với (v_n) là dãy số cho ở ví dụ 4, hãy tìm v_4.*

Người ta nói các dãy số (u_n) và (v_n) ở ví dụ 3 và ví dụ 4 là những dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi. Các hệ thức (2) và (3) gọi là *hệ thức truy hồi*.

***Cách 3 :** Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.*

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) với u_n là độ dài của dây cung AM_n trong hình 3.1.



Hình 3.1

CHÚ Ý

Một dãy số có thể cho bằng nhiều cách. Chẳng hạn, dãy số (u_n) ở ví dụ 3 có thể cho bởi công thức của số hạng tổng quát như sau :

$$u_n = 2^n - 1 , \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

H4 *Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát của dãy số (u_n) ở ví dụ 5.*

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

ĐỊNH NGHĨA 2

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$.

Ví dụ 6

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2$ là một dãy số tăng, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = n^2 < (n+1)^2 = u_{n+1}.$$

b) Dãy số (u_n) ở ví dụ 1 là một dãy số giảm, vì với mọi n ta luôn có

$$u_n = \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} = u_{n+1}.$$

H5 *Hãy cho một ví dụ về dãy số tăng, một ví dụ về dãy số giảm và một ví dụ về dãy số không tăng cũng không giảm.*

4. Dãy số bị chặn

ĐỊNH NGHĨA 3

a) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq M.$$

b) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq m.$$

c) Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới ; nghĩa là, tồn tại một số M và một số m sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m \leq u_n \leq M.$$

Ví dụ 7

a) Dãy số (u_n) nói tới ở phần a) ví dụ 6 là dãy số bị chặn dưới, vì

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq 1.$$

Tuy nhiên, dãy số đó không bị chặn trên, vì không có số M để cho

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq M.$$

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ là dãy số bị chặn, vì với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta luôn có

$$0 < \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} < 2.$$

H6 *Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :*

a) Mỗi hàm số là một dãy số.

b) Mỗi dãy số là một hàm số.

c) Mỗi dãy số tăng là một dãy số bị chặn dưới.

d) Mỗi dãy số giảm là một dãy số bị chặn trên.

e) Nếu (u_n) là một dãy số hữu hạn thì tồn tại các hằng số m và M, với $m \leq M$, sao cho tất cả các số hạng của (u_n) đều thuộc đoạn $[m ; M]$.

Câu hỏi và bài tập

9. Tìm 5 số hạng đầu của mỗi dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n^2-3}{n}$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = \sin^2\dfrac{n\pi}{4} + \cos\dfrac{2n\pi}{3}$;

c) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n.\sqrt{4^n}$.

10. Tìm số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 của mỗi dãy số sau :

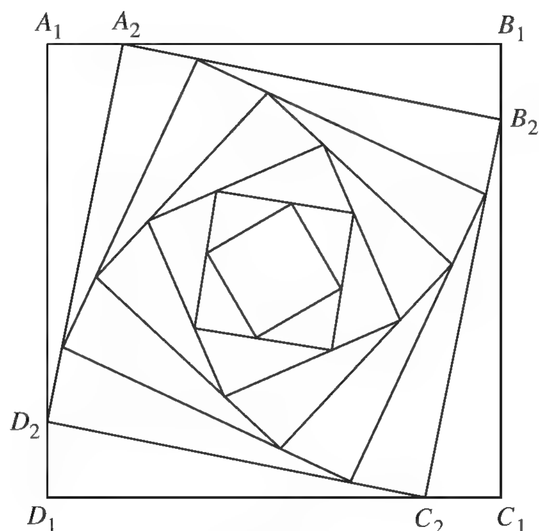
a) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 0 \quad \text{và} \quad u_n = \frac{2}{u_{n-1}^2 + 1} \quad \text{với mọi } n \geq 2 \text{ ;}$$

b) Dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 1,\ u_2 = -2 \quad \text{và} \quad u_n = u_{n-1} - 2u_{n-2} \quad \text{với mọi } n \geq 3.$$

11. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 6cm. Người ta dựng các hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, ... theo cách sau : Với mỗi $n = 2, 3, 4, ...$ lấy các điểm A_n, B_n, C_n và D_n tương ứng trên các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}D_{n-1}$ và $D_{n-1}A_{n-1}$ sao cho $A_{n-1}A_n = 1$cm và $A_nB_nC_nD_n$ là một hình vuông (h. 3.2).



Hình 3.2

Xét dãy số (u_n) với u_n là độ dài cạnh của hình vuông $A_nB_nC_nD_n$.

Hãy cho dãy số (u_n) nói trên bởi hệ thức truy hồi.

12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$ ta có $u_n = 2^{n+1} - 3$.

13. Hãy xét tính tăng, giảm của các dãy số sau :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n - 7$;

b) Dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{n+1}{3^n}$;

c) Dãy số (a_n) với $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Hướng dẫn :

a) Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$.

b) Xét tỉ số $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}$ ·

c) Viết lại công thức xác định a_n dưới dạng

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot$$

Tiếp theo, xét tỉ số $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ ·

14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{2n+3}{3n+2}$$

là một dãy số giảm và bị chặn.

Bài đọc thêm

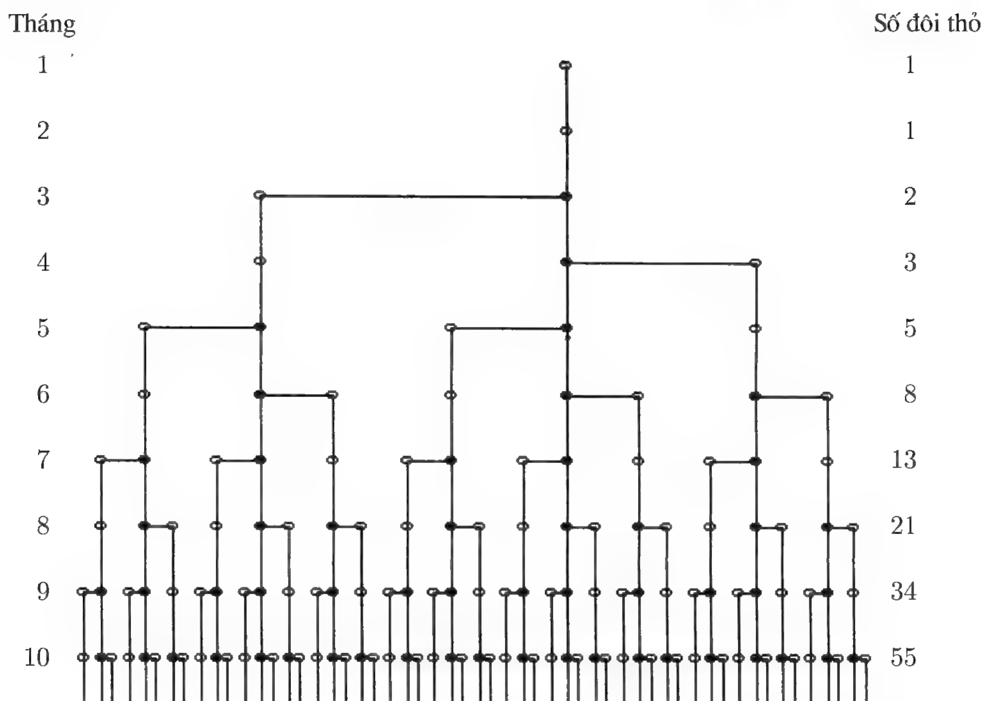
DÃY SỐ PHI-BÔ-NA-XI

Phi-bô-na-xi (Fibonacci) (còn có tên là Lê-ô-na-đô Đa Pi-da (Leonarda da Pisa)) là một nhà toán học nổi tiếng người I-ta-li-a. Trong cuốn sách Li-bơ A-ba-xi (Liber Abacci - Sách về toán đồ), do ông viết vào năm 1202, có bài toán sau :

"Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và một thỏ cái) ; mỗi đôi thỏ con, khi tròn hai tháng tuổi, lại mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau một năm sẽ có tất cả bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng giêng) có một đôi thỏ sơ sinh ?"



Fibonacci (1170 - 1250)



"Gia đình nhà thỏ trong 10 tháng"

Rõ ràng ở tháng giêng, cũng như ở tháng 2, chỉ có một đôi thỏ. Sang tháng 3, đôi thỏ này sẽ đẻ ra một đôi thỏ con, vì thế ở tháng này sẽ có 2 đôi thỏ. Sang tháng 4, vì vẫn

chỉ có đôi thỏ ban đầu sinh con nên ở tháng này sẽ có 3 đôi thỏ. Sang tháng 5, do có hai đôi thỏ (đôi thỏ ban đầu và đôi thỏ được sinh ra ở tháng 3) cùng sinh con nên ở tháng này sẽ có $3 + 2 = 5$ đôi thỏ ; ...

Một cách khái quát, nếu với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu F_n là số đôi thỏ có ở tháng thứ n, thì với $n \geq 3$ ta có

$$F_n = F_{n-1} + \text{Số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ } n.$$

Do các đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ $n - 1$ chưa thể đẻ con ở tháng thứ n, và ở tháng này mỗi đôi thỏ có ở tháng thứ $n - 2$ sẽ đẻ ra một đôi thỏ con nên số đôi thỏ được sinh ra ở tháng thứ n chính bằng F_{n-2}.

Như vậy, việc giải quyết bài toán nói trên của Phi-bô-na-xi dẫn ta tới việc khảo sát dãy số (F_n), xác định bởi

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1 \text{ và } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{với mọi } n \geq 3.$$

Dãy số trên sau này được nhà toán học Pháp E. Lu-ca (Edouard Lucas 1842 – 1891) gọi là *dãy số Phi-bô-na-xi*. Các số hạng của dãy số Phi-bô-na-xi được gọi là *các số Phi-bô-na-xi*.

Bằng phương pháp quy nạp toán học, người ta đã chứng minh được rằng

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)^n \quad \text{với mọi } n \geq 1,$$

trong đó α là nghiệm dương và β là nghiệm âm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$.

Dãy số Phi-bô-na-xi có rất nhiều tính chất đẹp, chẳng hạn :

1) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ với mọi $n \geq 2$;

2) $F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

3) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

... .

Dãy số Phi-bô-na-xi có liên quan mật thiết với nhiều vấn đề của toán học (số nguyên tố trong dãy số Phi-bô-na-xi, số vàng, hình chữ nhật vàng, số π, ...), vật lí học, ... Các số Phi-bô-na-xi có nhiều liên quan với tự nhiên và nghệ thuật (hội hoạ, âm nhạc, ...) ; chúng xuất hiện ở nhiều nơi trong thiên nhiên. Chẳng hạn, hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số $F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}$: hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa phi yến có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, 55 hoặc 89 cánh, ...

Luyện tập

15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + 5 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng $u_n = 5n - 2$ với mọi $n \geq 1$.

16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là một dãy số tăng.

b) Chứng minh rằng

$$u_n = 1 + (n-1).\, 2^n$$

với mọi $n \geq 1$.

17. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) là một *dãy số không đổi* (dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau).

18. Cho dãy số (s_n) với $s_n = \sin\,(4n - 1)\dfrac{\pi}{6}\cdot$

a) Chứng minh rằng $s_n = s_{n+3}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Hãy tính tổng 15 số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

§ 3 CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa

Quan sát dãy các số tự nhiên

$$0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$$

ta thấy các số hạng của nó có một mối liên hệ đặc biệt : Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và 1.

Ta còn gặp nhiều dãy số khác cũng có tính chất tương tự như dãy số trên trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học, kĩ thuật, cũng như trong thực tế cuộc sống. Người ta gọi các dãy số như vậy là những cấp số cộng.

ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng} \Leftrightarrow \forall n \geq 2,\quad u_n = u_{n-1} + d.$$

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Ví dụ 1

a) Dãy các số tự nhiên lẻ

$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$

là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

b) Dãy số $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$ là một cấp số cộng với công sai $d = 4$. □

H1 *Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng ? Vì sao ?*

a) $-5, -2, 1, 4, 7, 10$.

b) 3,5 ; 5 ; 6,5 ; 9 ; 10,5 ; 12.

2. Tính chất

Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ 1

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

Chứng minh

Gọi d là công sai của cấp số cộng (u_n). Với mọi $k \geq 2$ ta có

$$u_{k+1} = u_k + d,$$
$$u_{k-1} = u_k - d.$$

Từ hai đẳng thức trên ta được

$$u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k \quad \text{với mọi } k \geq 2.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

H2 *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1$ và $u_3 = 3$. Hãy tìm u_2 và u_4.*

3. Số hạng tổng quát

Dễ thấy, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của một cấp số cộng khi biết số hạng đầu u_1 và công sai d của nó. Chẳng hạn, để tìm u_4, ta có thể làm như sau :

$$u_4 = u_3 + d = u_2 + 2d = u_1 + 3d.$$

Một cách khái quát, ta có

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức sau :
>
> $$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Công thức đúng khi $n = 1$, vì $u_1 = u_1 + 0.d$. Giả sử công thức đúng khi $n = k$, $(k \in \mathbb{N}^*)$ tức là $u_k = u_1 + (k-1)d$. Khi đó ta có

$$u_{k+1} = u_k + d = \left[u_1 + (k-1)d\right] + d = u_1 + kd.$$

Vậy công thức cũng đúng khi $n = k + 1$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

H3 *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 13$ và công sai $d = -3$. Hãy tính u_{31}.*



Ví dụ 2. Cho một họ các đường tròn đồng tâm $(O\,;\,r_1)$, $(O\,;\,r_2)$, ... , $(O\,;\,r_n)$, ... mà dãy số (r_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai bằng 3.

Gọi u_1 là diện tích hình tròn $(O\,;\,r_1)$ và với mỗi số nguyên $n \geq 2$, gọi u_n là diện tích của hình vành khăn tạo bởi đường tròn $(O\,;\,r_{n-1})$ và đường tròn $(O\,;\,r_n)$.

Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

Giải

Đặt $r_0 = 0$. Khi đó, với mỗi $n \geq 1$, ta có

$$u_n = \pi.(r_n^2 - r_{n-1}^2) = \pi.(r_n - r_{n-1})(r_n + r_{n-1}) = 3\pi.(r_n + r_{n-1}).$$

Suy ra

$u_{n+1} - u_n = 3\pi.(r_{n+1} + r_n - r_n - r_{n-1}) = 3\pi.(3 + 3) = 18\pi$ (với mọi $n \geq 1$).

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 18\pi$, và số hạng đầu

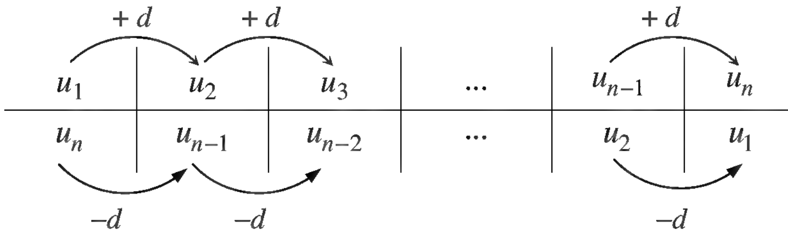
$$u_1 = \pi.r_1^2 = 9\pi.$$

Từ đó, theo định lí 2, ta được

$$u_n = 9\pi + (n-1).18\pi = 9(2n-1)\pi \quad \text{(với mọi } n \geq 1).$$ □

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Giả sử có cấp số cộng (u_n) với công sai d. Xét n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó, ta có thể biểu diễn mối liên hệ giữa chúng như sau :



Quan sát bảng trên có thể thấy tổng của hai số nằm trong cùng một cột bất kì luôn bằng tổng của u_1 và u_n. Nhận xét đó dẫn ta đến

ĐỊNH LÍ 3

> Giả sử (u_n) là một cấp số cộng. Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó ($S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$).
> Khi đó, ta có
>
> $$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Ví dụ 3. Một công ti trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau :

Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ti là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý.

Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư được nhận sau 3 năm làm việc cho công ti.

Giải

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n (triệu đồng) là mức lương của người kĩ sư ở quý làm việc thứ n cho công ti. Theo giả thiết của bài toán, ta có

$$u_1 = 4{,}5 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = u_n + 0{,}3 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Do đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 0{,}3$.

Vì mỗi năm có 4 quý nên 3 năm có 12 quý. Như thế, theo yêu cầu của bài toán ta phải tính tổng 12 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n).

Theo định lí 2, ta có : $u_{12} = 4{,}5 + (12 - 1).\,0{,}3 = 7{,}8.$

Do đó, theo định lí 3, ta được

$$S_{12} = \frac{12.(4{,}5 + 7{,}8)}{2} = 73{,}8 \text{ (triệu đồng).}$$ □

CHÚ Ý

Từ định lí 2 và định lí 3, dễ dàng suy ra

$$\forall n \geq 1, \qquad S_n = \frac{\left[2u_1 + (n-1)d\right]n}{2}.$$

H4 *Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -2$ và công sai $d = 2$. Hãy tính tổng 17 số hạng đầu tiên của cấp số đó.*

H5 *"Em sẽ chọn phương án nào ?".*



Khi kí hợp đồng lao động dài hạn với các kĩ sư được tuyển dụng, công ti liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn ; cụ thể :

– *Ở phương án 1* : Người lao động sẽ được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, và kể từ năm làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm.

– *Ở phương án 2* : Người lao động sẽ được nhận 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, và kể từ quý làm việc thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 500 000 đồng mỗi quý.

Nếu em là người kí hợp đồng lao động với công ti liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào ?

Câu hỏi và bài tập

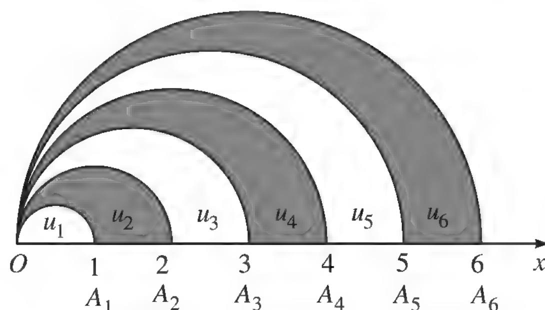
19. Chứng minh rằng mỗi dãy số sau là một cấp số cộng và hãy xác định công sai của cấp số cộng đó :

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

20. Trên tia Ox lấy các điểm A_1, A_2, ... , A_n, ... sao cho với mỗi số nguyên dương n, $OA_n = n$. Trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa tia Ox, vẽ các nửa đường tròn đường kính OA_n, $n = 1, 2, ...$.

Kí hiệu u_1 là diện tích của nửa hình tròn đường kính OA_1 và với mỗi $n \geq 2$, kí hiệu u_n là diện tích của hình giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính OA_{n-1}, nửa đường tròn đường kính OA_n và tia Ox (h 3.3).



Hình 3.3

Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng. Hãy xác định công sai của cấp số cộng đó.

21. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "×" vào phần kết luận mà em cho là đúng :

a) Mỗi cấp số cộng với công sai $d > 0$ là một dãy số

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

b) Mỗi cấp số cộng với công sai $d < 0$ là một dãy số

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

22. Một cấp số cộng có năm số hạng mà tổng của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 28, tổng của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng 40. Hãy tìm cấp số cộng đó.

23. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{20} = -52$ và $u_{51} = -145$. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

24. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d và cho các số nguyên dương m và k, với $m \geq k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k + (m - k)d$.

Áp dụng : Hãy tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) mà $u_{18} - u_3 = 75$.

25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 - u_3 = 6$ và $u_5 = -10$. Hãy tìm công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng đó.

26. Hãy chứng minh định lí 3.

27. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$. Hãy tính tổng 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

28. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm số đo ba góc đó.

§ 4 CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa

Xét bài toán : *Một ngân hàng quy định như sau đối với việc gửi tiền tiết kiệm theo thể thức có kì hạn : "Khi kết thúc kì hạn gửi tiền mà người gửi không đến rút tiền thì toàn bộ số tiền (bao gồm cả vốn và lãi) sẽ được chuyển gửi tiếp với kì hạn như kì hạn mà người gửi đã gửi".*

Giả sử có một người gửi 10 triệu đồng với kì hạn 1 tháng vào ngân hàng nói trên và giả sử lãi suất của loại kì hạn này là 0,4%.

a) Hỏi nếu 6 tháng sau, kể từ ngày gửi, người đó mới đến ngân hàng để rút tiền thì số tiền rút được (gồm cả vốn và lãi) là bao nhiêu ?

b) Cũng câu hỏi như trên, với giả thiết thời điểm rút tiền là 1 năm sau, kể từ ngày gửi ?

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n là số tiền người đó rút được (gồm cả vốn và lãi) sau n tháng, kể từ ngày gửi. Khi đó, theo giả thiết của bài toán ta có :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \times 0{,}004 = u_{n-1} \times 1{,}004 \quad \forall n \geq 2.$$

Như vậy, ta có dãy số (u_n) mà kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và 1,004.

Người ta gọi các dãy số có tính chất tương tự như dãy số (u_n) nói trên là những cấp số nhân.

ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } \Leftrightarrow \forall n \geq 2, \quad u_n = u_{n-1} \cdot q.$$

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Ví dụ 1

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2^n$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 2$.

b) Dãy số $-2, 6, -18, 54, -162$ là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -2$ và công bội $q = -3$.

H1 *Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân ? Vì sao ?*

a) 4 ; 6 ; 9 ; 13,5.

b) –1,5 ; 3 ; –6 ; –12 ; 24 ; –48 ; 96 ; –192.

c) 7 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = \frac{5}{2} \quad \text{và} \quad u_n = 3u_{n-1} - 1 \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi

$$v_n = u_n - \frac{1}{2} \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

là một cấp số nhân. Hãy cho biết số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Giải

Từ công thức xác định dãy số (v_n) và (u_n), ta có

$$v_n = u_n - \frac{1}{2} = 3u_{n-1} - 1 - \frac{1}{2} = 3(u_{n-1} - \frac{1}{2}) = 3v_{n-1} \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Từ đó suy ra dãy số (v_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu

$$v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

và công bội $q = 3$. □

2. Tính chất

Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ 1

> Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là
>
> $$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}.$$

Chứng minh

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n).

– Nếu $q = 0$ thì hiển nhiên ta có điều cần chứng minh.

– Nếu $q \neq 0$ thì từ định nghĩa cấp số nhân ta có

$$u_k = u_{k-1}.q \qquad (k \geq 2),$$

$$u_k = \frac{u_{k+1}}{q} \qquad (k \geq 2).$$

Nhân các vế tương ứng của hai đẳng thức trên, ta được điều cần chứng minh.

□

H2 *Hỏi có hay không một cấp số nhân (u_n) mà $u_{99} = -99$ và $u_{101} = 101$?*

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q > 0$. Biết $u_1 = 1$ và $u_3 = 3$, hãy tìm u_4.

Giải

Theo định lí 1, ta có

$$u_2^2 = u_1.u_3 \quad (1)$$

$$u_3^2 = u_2.u_4 \quad (2)$$

Từ (1), do $u_2 > 0$ (vì $u_1 = 1 > 0$ và $q > 0$), suy ra $u_2 = \sqrt{u_1.u_3}$. Từ đây và (2) ta được

$$u_4 = \frac{u_3^2}{\sqrt{u_1.u_3}} = \frac{3^2}{\sqrt{1.3}} = 3\sqrt{3}$$ □

3. Số hạng tổng quát

Tương tự như đối với cấp số cộng, ta có thể tìm được số hạng tuỳ ý của một cấp số nhân khi biết số hạng đầu và công bội của nó. Cụ thể, ta có kết quả sau :

ĐỊNH LÍ 2

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$

Ví dụ 4. Trở lại bài toán đặt ra ở phần đầu mục 1.

Theo yêu cầu của bài toán ta cần tính u_6 và u_{12}. Do (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 10^7 + 10^7. 0{,}004 = 10^7. 1{,}004$ và công bội $q = 1{,}004$ nên theo định lí 2 ta có

$$u_n = 10^7 .1{,}004 .(1{,}004)^{n-1} = 10^7. (1{,}004)^n \quad \forall n \geq 1.$$

Suy ra : $u_6 = 10^7. (1{,}004)^6 \approx 10\,242\,413$ (đồng),

$u_{12} = 10^7. (1{,}004)^{12} \approx 10\,490\,702$ (đồng). □

H3 *Dân số của thành phố A hiện nay là 3 triệu người. Biết rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của thành phố A là 2%. Hỏi dân số của thành phố A sau 2 năm nữa sẽ là bao nhiêu ?*

4. Tổng *n* số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Tương tự như đối với cấp số cộng, người ta cũng quan tâm tới việc xác định tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân theo số hạng đầu và công bội của nó.

Giả sử có cấp số nhân (u_n) với công bội q. Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của nó ($S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$).

Nếu $q = 1$ thì $u_n = u_1$ với mọi $n \geq 1$. Do đó, trong trường hợp này, ta có

$$S_n = nu_1.$$

Khi $q \neq 1$ ta có kết quả sau :

ĐỊNH LÍ 3

Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội $q \neq 1$ thì S_n được tính theo công thức

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Chứng minh

Ta có

$$qS_n = qu_1 + qu_2 + ... + qu_{n-1} + qu_n = u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1}.$$

Do đó $\quad S_n - qS_n = u_1 - u_{n+1} = u_1 - u_1q^n = u_1(1-q^n),$

hay $\quad (1-q)S_n = u_1(1-q^n).$ □

Từ đó, do $q \neq 1$, suy ra điều cần chứng minh.

Ví dụ 5. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 24$ và $u_4 = 48$. Hãy tính tổng năm số hạng đầu tiên của cấp số đó.

Giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có

$$q = \frac{48}{24} = 2.$$

Do đó, theo định lí 2, ta được : $24 = u_3 = u_1.2^2$. Suy ra $u_1 = 6$. Vì thế, theo định lí 3, ta được

$$S_5 = \frac{6.(1 - 2^5)}{1 - 2} = 186.$$ □

• *Đố vui. "Một hào đổi lấy năm xu ?"*

Tương truyền, vào một ngày nọ, có một nhà toán học đến gặp một nhà tỉ phú và đề nghị được "bán" tiền cho ông ta theo thể thức sau : Liên tục trong 30 ngày, mỗi ngày nhà toán học "bán" cho nhà tỉ phú 10 triệu đồng với giá 1 đồng ở ngày đầu tiên và kể từ ngày thứ hai, mỗi ngày nhà tỉ phú phải "mua" với giá gấp đôi giá của ngày hôm trước. Không một chút đắn đo, nhà tỉ phú đồng ý ngay tức thì, lòng thầm cảm ơn nhà toán học nọ đã mang lại cho ông ta một cơ hội hốt tiền "nằm mơ cũng không thấy".



Hỏi nhà tỉ phú đã lãi được bao nhiêu trong cuộc "mua – bán" kì lạ này ?

Câu hỏi và bài tập

29. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) Dãy số 1, –2, 4, –8, 16, –32, 64 ;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n.6^{n+1}$;

c) Dãy số (v_n) với $v_n = (-1)^n.3^{2n}$;

d) Dãy số (x_n) với $x_n = (-4)^{2n+1}$.

30. Trong mỗi câu sau, hãy đánh dấu "×" vào phần kết luận mà em cho là đúng :

a) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội $0 < q < 1$, là một dãy số

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

b) Mỗi cấp số nhân có số hạng đầu dương và công bội $q > 1$ là một dãy số

☐ Tăng. ☐ Giảm. ☐ Không tăng cũng không giảm.

31. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q < 0$. Biết $u_2 = 4$ và $u_4 = 9$, hãy tìm u_1.

32. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là những số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Hãy tìm cấp số nhân đó.

33. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 0$ và $u_1 \neq 0$. Cho các số nguyên dương m và k, với $m \geq k$. Chứng minh rằng $u_m = u_k \,.\, q^{m-k}$.

Áp dụng

a) Tìm công bội q của cấp số nhân (u_n) có $u_4 = 2$ và $u_7 = -686$.

b) Hỏi có tồn tại hay không một cấp số nhân (u_n) mà $u_2 = 5$ và $u_{22} = -2000$?

34. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân (u_n), biết rằng $u_3 = -5$ và $u_6 = 135$.

35. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính (chính xác đến hàng phần trăm) khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

36. Tính các tổng sau :

a) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng 18, số hạng thứ hai bằng 54 và số hạng cuối bằng 39 366 ;

b) Tổng tất cả các số hạng của một cấp số nhân, biết rằng số hạng đầu bằng $\frac{1}{256}$, số hạng thứ hai bằng $\frac{-1}{512}$ và số hạng cuối bằng $\frac{1}{1\,048\,576}$.

37. Bốn góc lượng giác có số đo dương lập thành một cấp số nhân có tổng là 360°. Hãy tìm bốn góc đó, biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

Luyện tập

38. Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :

a) Nếu các số thực a, b, c mà $abc \neq 0$, theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0 thì các số $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

b) Nếu các số thực a, b, c mà $abc \neq 0$, theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

c) $1 + \pi + \pi^2 + ... + \pi^{100} = \frac{\pi^{100} - 1}{\pi - 1}$.

39. Các số $x + 6y$, $5x + 2y$, $8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng ; đồng thời, các số $x - 1$, $y + 2$, $x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

40. Cho cấp số cộng (u_n) với công sai khác 0. Biết rằng các số u_1u_2, u_2u_3 và u_3u_1 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội $q \neq 0$. Hãy tìm q.

41. Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm công bội của cấp số nhân đó.

42. Hãy tìm ba số hạng đầu tiên của một cấp số nhân, biết rằng tổng của chúng bằng $\frac{148}{9}$ và đồng thời các số hạng đó tương ứng là số hạng đầu, số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của một cấp số cộng.

43. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \quad \text{và} \quad u_{n+1} = 5u_n + 8 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n), với $v_n = u_n + 2$, là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

b) Dựa vào kết quả phần a), hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III

44. Chứng minh rằng

$$1.2^2 + 2.3^2 + ... + (n-1).n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}$$

với mọi số nguyên $n \geq 2$.

45. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_n = \frac{u_{n-1}+1}{2} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng

$$u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$$

với mọi số nguyên dương n.

46. Cho các dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2n}{n+1}$.

a) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (a_n) với $a_n = u_n + v_n$.

b) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (b_n) với $b_n = u_n - v_n$.

c) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (c_n) với $c_n = u_n . v_n$.

d) Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (d_n) với $d_n = \frac{u_n}{v_n}$.

Chú ý

Các dãy số (a_n), (b_n), (c_n) và (d_n) nêu trên thường được kí hiệu tương ứng bởi $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n.v_n)$ và $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

47. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng, dãy số nào là cấp số nhân ? Hãy xác định công sai hoặc công bội của mỗi cấp số đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 8n + 3$;

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$;

c) Dãy số (u_n) với $u_n = 3.8^n$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = (n+2).3^n$.

48. Hãy chọn những khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây :

a) Dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = u_n + 5 \text{ với mọi } n \geq 1,$$

là một cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = u_n + n \text{ với mọi } n \geq 1,$$

là một cấp số cộng.

c) Dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 4 \text{ và } u_{n+1} = 5u_n \text{ với mọi } n \geq 1,$$

là một cấp số nhân.

d) Dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1 \text{ và } u_{n+1} = nu_n \text{ với mọi } n \geq 1,$$

là một cấp số nhân.

49. Cho dãy hình vuông $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n, p_n và S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n.

a) Giả sử dãy số (u_n) là một cấp số cộng với công sai khác 0. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (S_n) có phải là các cấp số cộng hay không ? Vì sao ?

b) Giả sử dãy số (u_n) là một cấp số nhân với công bội dương. Hỏi khi đó các dãy số (p_n) và (S_n) có phải là các cấp số nhân hay không ? Vì sao ?

50. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng (u_n) vừa là cấp số cộng, vừa là cấp số nhân.

51. Tìm hiểu tiền công khoan giếng ở hai cơ sở khoan giếng, người ta được biết :

– Ở *Cơ sở A* : Giá của mét khoan đầu tiên là 8 000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 500 đồng so với giá của mét khoan ngay trước nó.

– Ở *Cơ sở B* : Giá của mét khoan đầu tiên là 6 000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 7% giá của mét khoan ngay trước nó.

Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu u_n và v_n tương ứng là giá của mét khoan thứ n theo cách tính giá của cơ sở A và của cơ sở B.

a) Hãy tính u_2, u_3, v_2, v_3.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) là một cấp số cộng và dãy số (v_n) là một cấp số nhân. Hãy tìm số hạng tổng quát của mỗi dãy số đó.

c) Một người muốn chọn một trong hai cơ sở nói trên để thuê khoan một giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi người ấy nên chọn cơ sở nào, nếu chất lượng cũng như thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau ?

d) Cũng câu hỏi như phần c), với giả thiết độ sâu của giếng cần khoan là 25 mét.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

52. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai

a) Tồn tại một cấp số nhân (u_n) có $u_5 < 0$ và $u_{75} > 0$.

b) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai khác 0 thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

c) Nếu các số thực a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân thì các số a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

Trong các bài từ 53 đến 57, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

53. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = \frac{1}{2}$ và $u_n = u_{n-1} + 2n$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{50} bằng

(A) 1274,5 ; (B) 2548,5 ; (C) 5096,5 ; (D) 2550,5.

54. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = -1$ và $u_n = 2n.u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó u_{11} bằng

(A) $2^{10}.11!$; (B) $-2^{10}.11!$; (C) $2^{10}.11^{10}$; (D) $-2^{10}.11^{10}$.

55. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 150$ và $u_n = u_{n-1} - 3$ với mọi $n \geq 2$. Khi đó tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số đó bằng

(A) 150 ; (B) 300 ; (C) 29850 ; (D) 59700.

56. Cho cấp số cộng (u_n) có : $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng

(A) 4005 ; (B) 4003 ; (C) 3 ; (D) 1.

57. Cho cấp số nhân (u_n) có : $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

(A) $\frac{1 - 3^{1000}}{4}$; (B) $\frac{3^{1000} - 1}{2}$; (C) $\frac{3^{1000} - 1}{6}$; (D) $\frac{1 - 3^{1000}}{6}$.

Chương 4 GIỚI HẠN



Giới hạn là một trong các vấn đề cơ bản của Giải tích. Có thể nói : Không có giới hạn thì không có Giải tích, hầu hết các khái niệm của Giải tích đều liên quan đến giới hạn.

Chương này giới thiệu khái niệm giới hạn của dãy số, của hàm số và nêu một số định lí, quy tắc tìm giới hạn.

Yêu cầu trọng tâm của chương là vận dụng một cách linh hoạt các định lí, quy tắc đó để tìm giới hạn của dãy số và hàm số.

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

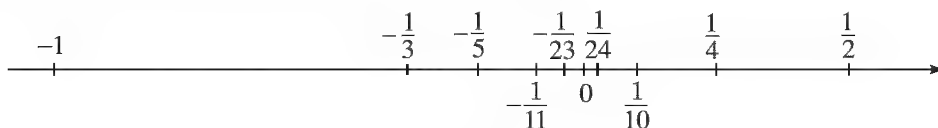
§ 1 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn 0

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, tức là dãy số

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, ..., \frac{1}{10}, -\frac{1}{11}, ..., -\frac{1}{23}, \frac{1}{24}, ...$$

Biểu diễn các số hạng của dãy số đã cho trên trục số, ta thấy khi n tăng thì các điểm biểu diễn chụm lại quanh điểm 0 (h. 4.1).



Hình 4.1

Khoảng cách $|u_n| = \frac{1}{n}$ từ điểm u_n đến điểm 0 trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn.

Điều này được giải thích rõ hơn trong bảng sau :

n	1	2	3	...	10	11	12	...	23	24	25	...	50	51	52	...
$\lvert u_n \rvert$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	...	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	...	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$	...	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{52}$	...

– Mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ số hạng thứ 11 trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $\frac{1}{10}$, tức là

$$|u_n| = \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \text{ với mọi } n > 10.$$

– Mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ số hạng thứ 24 trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $\frac{1}{23}$, tức là

$$|u_n| < \frac{1}{23} \text{ với mọi } n > 23.$$

H1 *Kể từ số hạng thứ mấy trở đi, mọi số hạng của dãy số đã cho đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn* $\frac{1}{50}$.

Cũng câu hỏi đó cho mỗi số : $\frac{1}{75}$; $\frac{1}{500}$; $\frac{1}{1\,000\,000}$.

Như vậy mọi số hạng của dãy số đã cho, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tuỳ ý cho trước. Ta nói rằng dãy số $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ có giới hạn là 0.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng **dãy số (u_n) có giới hạn 0** (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = 0 \text{ hoặc } \lim u_n = 0 \text{ hoặc } u_n \to 0.$$

(Kí hiệu "$\lim u_n = 0$" còn được viết "$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$", đọc là dãy số ($u_n$) có giới hạn là 0 khi n dần đến vô cực).

Nhận xét

Từ định nghĩa suy ra rằng

a) Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0.

Chẳng hạn, ta có $\lim\frac{1}{n} = 0$ vì $\frac{1}{n} = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ và $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Dựa vào định nghĩa, người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; b) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

Định lí sau đây thường được sử dụng để chứng minh một số dãy số có giới hạn 0.

ĐỊNH LÍ 1

> Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).
> Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Chứng minh. Cho một số dương nhỏ tuỳ ý. Vì $\lim v_n = 0$ nên kể từ số hạng thứ N nào đó trở đi mọi số hạng của dãy số (v_n) đều nhỏ hơn số dương đó. Do $|u_n| \le v_n$ nên mọi số hạng của dãy số (u_n), kể từ số hạng thứ N trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đã cho. Vậy $\lim u_n = 0$. □

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}} = 0$.

Giải

Ta có

$$\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ và } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

H2 *Cho k là một số nguyên dương. Chứng minh rằng* $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0.$

Áp dụng định lí 1, có thể chứng minh định lí sau :

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Ví dụ 2

a) $\lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$; b) $\lim \dfrac{(-2)^n}{3^n} = \lim \left(\dfrac{-2}{3}\right)^n = 0.$

H3 *Chứng minh rằng* $\lim \dfrac{\cos \frac{n\pi}{5}}{4^n} = 0.$

Câu hỏi và bài tập

1. Chứng minh rằng các dãy số với số hạng tổng quát sau đây có giới hạn 0 :

a) $\dfrac{(-1)^n}{n+5}$;   b) $\dfrac{\sin n}{n+5}$;   c) $\dfrac{\cos 2n}{\sqrt{n}+1}$.

2. Chứng minh rằng hai dãy số (u_n) và (v_n) với

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n^2+1}$$

có giới hạn 0.

3. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 :

a) $u_n = (0{,}99)^n$;   b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n+1}$;   c) $u_n = -\dfrac{\sin\frac{n\pi}{5}}{(1{,}01)^n}$.

4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{2}{3}$ với mọi n.

b) Bằng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng $0 < u_n \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ với mọi n.

c) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0.

§ 2 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

1. Định nghĩa dãy số có giới hạn hữu hạn

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Ta có

$$\lim(u_n - 3) = \lim\frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 3.

Một cách tổng quát, ta có :

ĐỊNH NGHĨA

> Ta nói rằng **dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L** nếu $\lim(u_n - L) = 0$.
> Khi đó ta viết
> $$\lim(u_n) = L \text{ hoặc } \lim u_n = L \text{ hoặc } u_n \to L.$$
> Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là **dãy số có giới hạn hữu hạn**.

Ví dụ 1. Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$ (c là hằng số) có giới hạn là c vì

$$\lim(u_n - c) = \lim(c - c) = \lim 0 = 0.$$ □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1\right) = -1$.

Giải

Đặt $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - 1$.

Vì $\lim(u_n - (-1)) = \lim\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$ nên $\lim u_n = -1$. □

H1 *Chứng minh rằng :*

a) $\lim\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right) = 1$;   b) $\lim\left(\frac{2 - 5n}{2n}\right) = -\frac{5}{2}$.

Nhận xét

1) Từ định nghĩa vừa nêu, suy ra rằng $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ từ điểm u_n đến điểm L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn ; nói một cách hình ảnh, khi n tăng các điểm u_n chụm lại quanh điểm L.

2) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn. Chẳng hạn dãy số $((-1)^n)$, tức là dãy số

$$-1, 1, -1, 1, \dots .$$

không có giới hạn hữu hạn.

Trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng các điểm $(-1)^n$ không chụm lại quanh bất kì một điểm L nào.

2. Một số định lí

Ta thừa nhận các định lí sau

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó
> a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$;
> b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 3. $\lim \sqrt{9 + \dfrac{\cos 2n}{n}} = 3$ vì $\lim\left(9 + \dfrac{\cos 2n}{n}\right) = 9$. □

H2 *Tìm* $\lim \sqrt[3]{\dfrac{27n^2 - n}{n^2}}$.

ĐỊNH LÍ 2

> Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó
> $$\lim(u_n + v_n) = L + M,$$
> $$\lim(u_n - v_n) = L - M,$$
> $$\lim(u_n . v_n) = LM,$$
> $$\lim(cu_n) = cL,$$
> $$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0).$$

Ví dụ 4. Tìm $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{3n^2 + 4n - 7}{n^2}$.

Giải

Ta có

$$\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = \lim 3 + \lim \frac{4}{n} - \lim \frac{7}{n^2}$$

$$= \lim 3 + 4\lim \frac{1}{n} - 7\lim \frac{1}{n^2} = 3 + 4.0 - 7.0 = 3.$$ □

Ví dụ 5. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$u_n = \frac{2 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}}.$$

Vì

$$\lim\left(2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right) = \lim 2 - \lim\frac{4}{n} + \lim\frac{3}{n^2} + \lim\frac{3}{n^3} = 2$$

và $\lim\left(1 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{7}{n^3}\right) = 1 \neq 0$ nên $\lim\dfrac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7} = \dfrac{2}{1} = 2.$ □

H3 *Tìm giới hạn của dãy số* (u_n) *với* $u_n = \dfrac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$.

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Xét cấp số nhân vô hạn

$$u_1, u_1q, u_1q^2, ..., u_1q^n, ...$$

có công bội q với $|q| < 1$ (gọi là một *cấp số nhân lùi vô hạn*).

Ta biết rằng tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó là

$$S_n = u_1 + u_1q + ... + u_1q^{n-1} = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{u_1}{1-q} - \frac{u_1}{1-q}q^n.$$

Vì $|q| < 1$ nên $\lim q^n = 0$. Do đó

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ta gọi giới hạn đó là **tổng của cấp số nhân** đã cho và viết

$$\boxed{S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}.}$$

H4 *Tìm tổng của cấp số nhân*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots.$$

Ví dụ 6. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,777... dưới dạng phân số.

Giải

Ta có $0{,}777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \ldots$.

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{7}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$. Do đó

$$0{,}777\ldots = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9}.$$ □

H5 *Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn* 0,313131... *dưới dạng phân số.*

Câu hỏi và bài tập

5. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(2 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$;

b) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n} - 1\right)$;

c) $\lim \frac{n-1}{n}$;

d) $\lim \frac{n+2}{n+1}$.

6. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$;

b) $u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$;

c) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$;

d) $u_n = \frac{4^n}{2.3^n + 4^n}$.

7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 10 \text{ và } u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 3 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tìm $\lim u_n$.

8. Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ và $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$, ...

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng

$$p_1 + p_2 + ... + p_n + ... \text{ và } S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$$

9. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số :

a) 0,444... ; b) 0,2121... ; c) 0,32111... .

10. Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$,

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

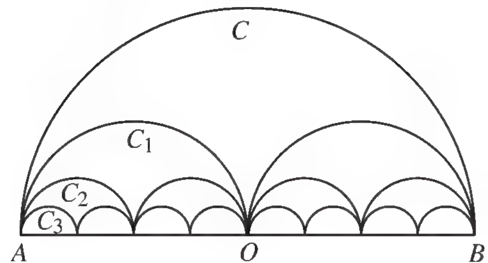
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (h. 4.2).

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n và S_n.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Hình 4.2

Bài đọc thêm

ĐOÁN NHẬN GIỚI HẠN CỦA MỘT DÃY SỐ THỰC BẰNG HÌNH HỌC

1) Ta đã biết tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

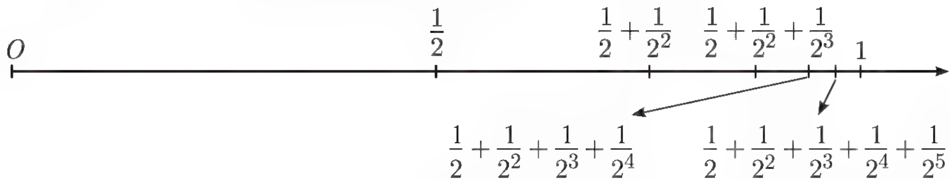
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$$

là

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1$$

(xem **H4** trong §2).

Có thể đoán nhận được kết quả này nhờ hình 4.3 hoặc hình 4.4.



Hình 4.3

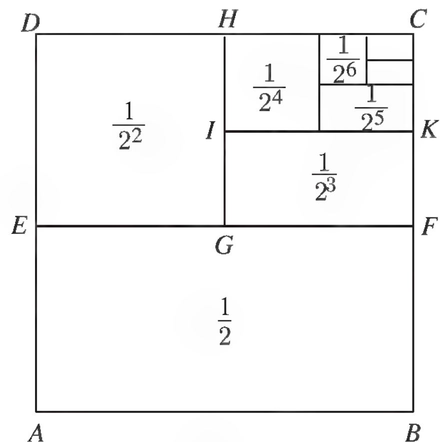
Ở hình 4.3 : trung điểm của đoạn $[0 ; 1]$ là điểm $\frac{1}{2}$, trung điểm của đoạn $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ là điểm $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$, trung điểm của đoạn $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} ; 1\right]$ là điểm $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$, ...

Do đó

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1 .$$

Ở hình 4.4 : hình vuông $ABCD$ có cạnh dài 1 đơn vị và diện tích bằng 1, hình chữ nhật $AEFB$ có diện tích bằng $\frac{1}{2}$, hình vuông $DHGE$ có diện tích bằng $\frac{1}{2^2}$, hình chữ nhật $GIKF$ có diện tích bằng $\frac{1}{2^3}$, ...

Do đó $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1.$



Hình 4.4

2) Xét bài toán sau :

Cho dãy số thực (u_n) *xác định bởi*

$$u_1 = c \text{ và } u_{n+1} = au_n + b \text{ với } n \geq 1,$$

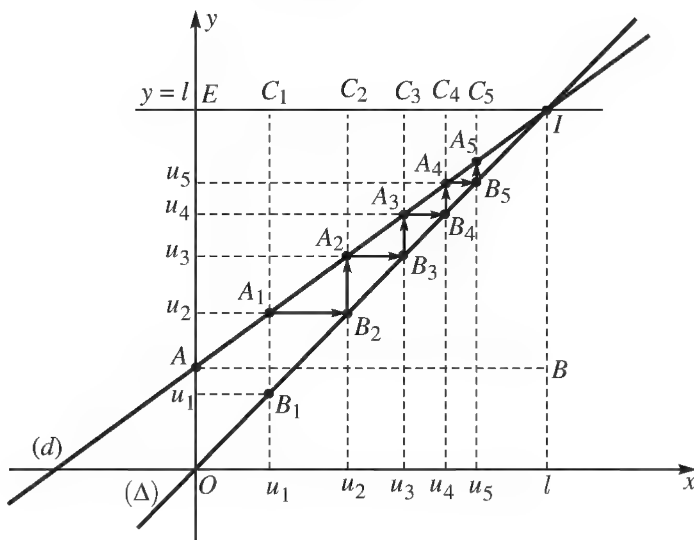
trong đó a, b, c *là những số thực cho trước,* $0 < a < 1$ *và* $b \neq 0$.

Tìm giới hạn của dãy số đã cho.

Để đoán nhận giới hạn của dãy số đã cho, ta sẽ biểu diễn các số hạng của nó trên hai trục toạ độ (h. 4.5). Dựng hai đường thẳng (d) và (Δ) theo thứ tự có phương trình là $y = ax + b$ và $y = x$ (ở đây ta giả thiết $b > 0$; trong trường hợp $b < 0$, cách giải và kết quả hoàn toàn tương tự). Gọi A_1 và B_1 theo thứ tự là giao điểm của đường thẳng $x = u_1$ với đường thẳng (d) và đường thẳng (Δ). Điểm A_1 có tung độ $au_1 + b = u_2$ và điểm B_1 có tung độ là u_1. Đường thẳng đi qua A_1 và song song với trục hoành cắt (Δ) tại B_2. Điểm B_2 có hoành độ là u_2. Đường thẳng đi qua B_2 và song song với trục tung cắt (d) tại điểm A_2. Tung độ của A_2 là $au_2 + b = u_3$. Các điểm $B_3, A_3, B_4, A_4, ...,$ $B_n, A_n, ...$ được xác định một cách tương tự.

Gọi $I\ (l\ ;\ l)$ là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (Δ). Khi n tăng thì điểm A_n ngày càng dần đến điểm I, các điểm u_n trên trục hoành (và trên trục tung) ngày càng dần đến điểm l, tức là

$$\lim u_n = l.$$



Hình 4.5

Vì I là giao điểm của hai đường thẳng (d) và (Δ) nên l là nghiệm của phương trình

$$ax + b = x,$$

tức là

$$x = l = \frac{b}{1 - a}.$$

Nhận xét

Gọi C_1, C_2, ..., C_n, ... là các giao điểm của đường thẳng $y = l$ với các đường thẳng $x = u_1, x = u_2, ..., x = u_n, ...$.

Khi đó

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{AE}{OE} = \frac{BI}{AB} = a.$$

Vì $A_1C_1 = l - u_2$ và $B_1C_1 = l - u_1$ nên từ đó ta có

$$\frac{l - u_2}{l - u_1} = a.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{l - u_{n+1}}{l - u_n} = a \text{ với mọi } n.$$

Do đó, nếu đặt $v_n = l - u_n$ thì dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn.

§ 3 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Xét dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Ta thấy khi n tăng thì u_n trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn. Nói cách khác, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý cho trước.

Ta nói rằng dãy số $(2n - 3)$ có giới hạn là $+\infty$.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ nếu với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = +\infty \text{ hoặc } \lim u_n = +\infty \text{ hoặc } u_n \to +\infty.$$

Áp dụng định nghĩa trên có thể chứng minh rằng :

a) $\lim n = +\infty$; b) $\lim \sqrt{n} = +\infty$; c) $\lim \sqrt[3]{n} = +\infty$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

ĐỊNH NGHĨA

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ nếu với mỗi số âm tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Khi đó ta viết

$$\lim(u_n) = -\infty \text{ hoặc } \lim u_n = -\infty \text{ hoặc } u_n \to -\infty.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty.$$

Ví dụ 1. Vì $\lim(2n - 3) = +\infty$ nên $\lim(-2n + 3) = -\infty$.

CHÚ Ý

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các *dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực*.

Nhận xét. Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn. Do đó $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| = \dfrac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

Người ta chứng minh được

ĐỊNH LÍ

> Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\dfrac{1}{u_n} = 0.$

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Vì $+\infty$ và $-\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí trong §2 cho các dãy số có giới hạn vô cực. Khi tìm các giới hạn vô cực, ta có thể sử dụng các quy tắc sau đây.

a) Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_nv_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 2. Vì $n^2 = n.n$ và $\lim n = +\infty$ nên $\lim n^2 = +\infty$.

Tương tự, với mọi số nguyên dương k, ta có $\lim n^k = +\infty$.

b) Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_nv_n)$ được cho trong bảng sau :

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_nv_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Ví dụ 3. Tìm a) $\lim(3n^2 - 101n - 51)$; b) $\lim \dfrac{-5}{3n^2 - 101n - 51}$.

Giải

a) Ta có $3n^2 - 101n - 51 = n^2\left(3 - \dfrac{101}{n} - \dfrac{51}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2 = +\infty$ và $\lim\left(3 - \dfrac{101}{n} - \dfrac{51}{n^2}\right) = 3 > 0$ nên

$$\lim(3n^2 - 101n - 51) = +\infty.$$

b) Vì $\lim(3n^2 - 101n - 51) = +\infty$ nên

$$\lim \frac{-5}{3n^2 - 101n - 51} = -5\lim \frac{1}{3n^2 - 101n - 51} = (-5).0 = 0. \quad \square$$

H1 *Tìm*

a) $\lim(n\sin n - 2n^3)$; b) $\lim \dfrac{1}{n\sin n - 2n^3}$.

c) Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0, \lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau :

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

Ví dụ 4. Tìm $\lim \dfrac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của n trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}.$$

Vì $\lim\left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) = 3 > 0$, $\lim\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = 0$ và $\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} > 0$ với mọi n nên

$$\lim\frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n} = +\infty.$$ □

H2 *Tìm* $\lim\frac{-2n^3 + n}{3n - 2}$.

Câu hỏi và bài tập

11. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = -2n^3 + 3n + 5$;

b) $u_n = \sqrt{3n^4 + 5n^3 - 7n}$.

12. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{-2n^3 + 3n - 2}{3n - 2}$;

b) $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$.

13. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(2n + \cos n)$;

b) $\lim\left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5\right)$.

14. Chứng minh rằng nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty$.

15. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 1}$;

b) $u_n = 2^n - 3^n$.

Luyện tập

16. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim \dfrac{n^2 + 4n - 5}{3n^3 + n^2 + 7}$;

b) $\lim \dfrac{n^5 + n^4 - 3n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{2n^2 - n + 3}$;

d) $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$ ·

17. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim(3n^3 - 7n + 11)$;

b) $\lim \sqrt{2n^4 - n^2 + n + 2}$;

c) $\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$;

d) $\lim \sqrt{2.3^n - n + 2}$.

18. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n\right)$;

Hướng dẫn : Nhân và chia biểu thức đã cho với $\sqrt{n^2 + n + 1} + n$.

b) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n + 2} - \sqrt{n + 1}}$;

Hướng dẫn : Nhân tử và mẫu của phân thức đã cho với $\sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 1}$.

c) $\lim\left(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n + 1}\right)$;

d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{3n + 2} - \sqrt{2n + 1}}$;

e) $\lim\left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}\right)n$;

f) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$ ·

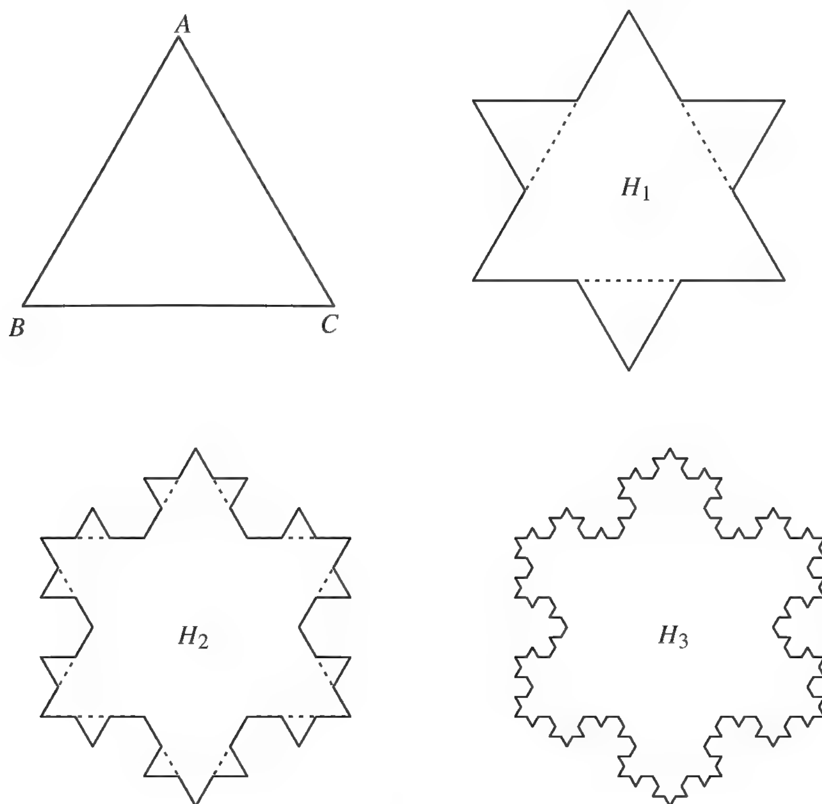
19. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\dfrac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\dfrac{39}{25}$ ·

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

20. Bông tuyết Vôn Kốc

Ta bắt đầu từ một tam giác đều *ABC* cạnh *a*. Chia mỗi cạnh của tam giác *ABC* thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài tam giác *ABC* rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_1. Chia mỗi cạnh của H_1 thành ba đoạn thẳng bằng nhau. Trên mỗi

đoạn thẳng ở giữa, dựng một tam giác đều nằm ngoài H_1 rồi xoá đáy của nó, ta được đường gấp khúc khép kín H_2. Tiếp tục như vậy, ta được một hình giống như bông tuyết, gọi là *bông tuyết Vôn Kốc* (*) (h. 4.6).



Hình 4.6

a) Gọi $p_1, p_2, ..., p_n, ...$ là độ dài của $H_1, H_2, ..., H_n, ...$. Chứng minh rằng (p_n) là một cấp số nhân. Tìm $\lim p_n$.

b) Gọi S_n là diện tích của miền giới hạn bởi đường gấp khúc H_n. Tính S_n và tìm giới hạn của dãy số (S_n).

Hướng dẫn : Số cạnh của H_n là 3.4^n. Tìm độ dài mỗi cạnh của H_n, từ đó tính p_n. Để tính S_n cần chú ý rằng muốn có H_{n+1} chỉ cần thêm vào một tam giác đều nhỏ trên mỗi cạnh của H_n.

(*) Helge von Koch (1879 – 1924) là một nhà toán học Thuỵ Điển. Tên của ông gắn liền với một ví dụ về một hình phẳng có chu vi vô cực và diện tích hữu hạn.



GIÔN UƠ-LIT NGƯỜI SÁNG TẠO KÍ HIỆU ∞


John Wallis (1616 - 1703)

Từ rất sớm, nhà toán học Anh Giôn Uơ-lit (John Wallis) đã học tiếng Hi Lạp, tiếng La-tinh và tiếng Hê-brơ. Năm mười lăm tuổi, ông bắt đầu say sưa học Toán.

Năm 24 tuổi, ông được phong linh mục và trở thành giáo sư Toán tại trường Ốc-xphớt (Oxford) ở Anh. Ông giảng dạy và nghiên cứu tại đó cho đến cuối đời.

Ông có công lớn vì đã phát hiện được thiên tài toán học của Niu-tơn. Ông là người đầu tiên đã định nghĩa một cách chính xác luỹ thừa với các số mũ không, âm và hữu tỉ.

Ông còn là người sáng tạo ra kí hiệu ∞ để chỉ khái niệm vô cực.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§ 4 ĐỊNH NGHĨA VÀ MỘT SỐ ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Xét bài toán sau :

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 2}$ *và một dãy bất kì* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ *những số thực khác 2 (tức là* $x_n \neq 2$ *với mọi n) sao cho* $\lim x_n = 2$. (1)

Hãy xác định dãy các giá trị tương ứng $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ *của hàm số và tìm* $\lim f(x_n)$.

Vì $x_n \neq 2$ nên

$$f(x_n) = \frac{2(x_n^2 - 4)}{x_n - 2} = 2(x_n + 2) \text{ với mọi } n.$$

Do đó

$$f(x_1) = 2(x_1 + 2),\quad f(x_2) = 2(x_2 + 2), \ldots,\quad f(x_n) = 2(x_n + 2), \ldots .$$

Từ (1) suy ra

$$\lim f(x_n) = \lim 2(x_n + 2) = 2(\lim x_n + 2) = 2(2 + 2) = 8.$$

Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là 8 khi x dần đến 2.

Một cách tổng quát, ta có

ĐỊNH NGHĨA 1

Giả sử $(a\ ;\ b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a\ ;\ b)\backslash\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a\ ;\ b) \backslash \{x_0\}$ (tức là $x_n \in (a\ ;\ b)$ và $x_n \neq x_0$ với mọi n) mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0.$$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x \to 0}\left(x \cos \frac{1}{x}\right) \cdot$

Giải

Xét hàm số $f(x) = x\cos\frac{1}{x} \cdot$ Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$, ta có $f(x_n) = x_n \cos\frac{1}{x_n} \cdot$ Vì

$$|f(x_n)| = |x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \text{ và } \lim|x_n| = 0$$

nên $\lim f(x_n) = 0$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$ □

H1 *Tìm* $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}$.

Nhận xét. Áp dụng định nghĩa 1, dễ dàng chứng minh được rằng :

a) Nếu $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó c là một hằng số, thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c = c.$$

b) Nếu $g(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

b) Giới hạn vô cực

Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm được định nghĩa tương tự như giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm. Chẳng hạn, $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ có nghĩa là với mọi dãy (x_n) trong tập hợp $(a\,;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^2}$.

Giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$. Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 1$ với mọi n và $\lim x_n = 1$, ta có $f(x_n) = \frac{3}{(x_n-1)^2}$. Vì $\lim 3 = 3 > 0$, $\lim(x_n-1)^2 = 0$ và $(x_n-1)^2 > 0$ với mọi n nên $\lim f(x_n) = +\infty$. Do đó

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^2} = +\infty.$$ □

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Giới hạn của hàm số tại vô cực (khi x dần đến $+\infty$ hoặc $-\infty$) được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số tại một điểm.

ĐỊNH NGHĨA 2

• Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\ ;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a\ ;+\infty)$ (tức là $x_n > a$ với mọi n) mà $\lim x_n = +\infty$, ta đều có

$$\lim f(x_n) = L.$$

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to +\infty.$$

• Các giới hạn

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 3

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, vì với mọi dãy số âm (x_n) mà $\lim x_n = -\infty$, ta đều có $\lim \dfrac{1}{x_n} = 0$.

b) Tương tự, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. □

Nhận xét

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, có thể chứng minh được rằng :

Với mọi số nguyên dương k, ta có

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

3. Một số định lí về giới hạn hữu hạn

Áp dụng các định lí về giới hạn của dãy số, có thể chứng minh được các định lí sau đây về giới hạn của hàm số.

ĐỊNH LÍ 1

> Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ $(L, M \in \mathbb{R})$. Khi đó
>
> a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$;
>
> b) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x) \right] = L - M$;
>
> c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) g(x) \right] = LM$;
>
> Đặc biệt, nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x \to x_0} \left[c f(x) \right] = cL$;
>
> d) Nếu $M \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Để dễ nhớ, ta nói

Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số tại một điểm bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn của chúng tại điểm đó (trong trường hợp thương, giới hạn của mẫu phải khác không).

Định lí 1 vừa nêu và định lí 2 tiếp theo vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Nhận xét

Nếu k là một số nguyên dương và a là một hằng số thì với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, ta có

$$\lim_{x \to x_0} ax^k = \lim_{x \to x_0} a . \underbrace{\lim_{x \to x_0} x . \lim_{x \to x_0} x \ldots \lim_{x \to x_0} x}_{k \text{ thừa số}} = a\left(\lim_{x \to x_0} x\right)^k = ax_0^k.$$

Ví dụ 4. Tìm

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 7)$;

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2}$.

Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 5x^2 + 7) = \lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} (5x^2) + \lim\limits_{x \to 2} 7$

$$= 2^3 - 5 . 2^2 + 7 = -5.$$

b) Với $x \neq -1$, ta có $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2}$.

Do đó

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2} = -3. \qquad \square$$

H2 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho x^3 (x^3 là luỹ thừa bậc cao nhất của x trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3} = \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{10}{x^3}}{1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{10}{x^3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} - \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{10}{x^3}$

$$= 2\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + 10\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$$

$$= 2 \,.\, 0 - 0 + 10 \,.\, 0 = 0,$$

và $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right) = 1$ nên theo định lí 1. d), ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 3} = \frac{0}{1} = 0. \qquad \square$$

H3 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}$.

ĐỊNH LÍ 2

> Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. Khi đó
>
> a) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$;
>
> b) $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$;
>
> c) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7} = 2$ nên $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{2x^4 - x^3 + x}{x^4 + 2x^2 - 7}} = \sqrt{2}$. □

H4 *Tìm* $\lim\limits_{x\to -1} |x^3 + 7x|$ *và* $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{x^3 + 7x}$.

Câu hỏi và bài tập

21. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

22. Cho hàm số $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ và hai dãy số (x'_n), (x''_n) với

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad x''_n = \frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

a) Tìm giới hạn của các dãy số $(x'_n), (x''_n), (f(x'_n))$ và $(f(x''_n))$.

b) Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{1}{x}$?

23. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 + 7x + 11)$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;

d) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$;

e) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} |x^2 - 4|$;

f) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^4 + 3x - 1}{2x^2 - 1}}$.

24. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^3 - 1}$.

25. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 2x}{8x^2 - x + 3}}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2 - x + 2}$.

Bài đọc thêm

CÁC ĐỊNH LÍ KẸP VÀ ĐỊNH LÍ VỀ ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ TĂNG HOẶC GIẢM

Trong bài này ta sẽ đề cập đến một vài định lí quan trọng trong lí thuyết giới hạn, được sử dụng nhiều trong lí thuyết cũng như trong thực hành.

1. Các định lí kẹp

Ta nhắc lại một định lí ở đầu chương : Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Đó là một trường hợp riêng của định lí sau :

Định lí 1 (Định lí kẹp về giới hạn của dãy số)

Cho ba dãy số (u_n), (v_n) và (w_n). Nếu

$$u_n \le v_n \le w_n \text{ với mọi } n \tag{1}$$

và $\lim u_n = \lim w_n = L \quad (L \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = L$.

Chứng minh. Từ (1) suy ra

$$0 \le v_n - u_n \le w_n - u_n \text{ với mọi } n.$$

Vì $\lim(w_n - u_n) = \lim w_n - \lim u_n = L - L = 0$ nên $\lim(v_n - u_n) = 0$.

Do đó $\lim v_n = \lim\left[(v_n - u_n) + u_n\right] = \lim(v_n - u_n) + \lim u_n = 0 + L = L$.

Ví dụ. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Giải. Với mỗi số nguyên k mà $1 \le k \le n$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Do đó

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad \text{với mọi } n.$$

Dễ thấy $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, do đó $\lim u_n = 1$. □

Từ định lí 1 và định nghĩa giới hạn của hàm số ta suy ra

Định lí 2 (Định lí kẹp về giới hạn của hàm số)

Giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J \setminus \{x_0\}$. Nếu $f(x) \le g(x) \le h(x)$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Áp dụng định lí 2, người ta chứng minh được định lí sau :

Định lí 3

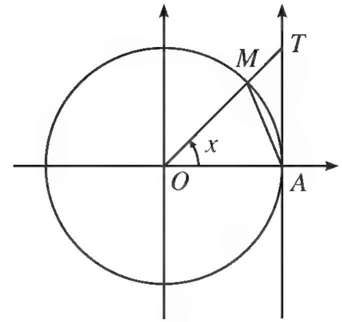
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Chứng minh

Vì $x \ne 0$ nên ta chỉ cần xét x trong một khoảng nào đó chứa điểm 0, chẳng hạn $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $x \ne 0$.

• Trước hết giả sử $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$. Trên đường tròn lượng giác, ta đặt cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo bằng x rad. Tia OM cắt trục tang tại điểm T (h.47). Ta có diện tích $\Delta\ OAM$ < diện tích hình quạt OAM < diện tích $\Delta\ OAT$, tức là

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$



Hình 4.7

Vì $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin x > 0$; do đó chia các vế của các bất đẳng thức trên cho $\frac{1}{2}\sin x$, ta được

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \qquad (1)$$

Vì $\cos x > 0$ với $x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$ nên từ (1) suy ra

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (2)$$

Nếu $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;0\right)$ thì $-x \in \left(0\,;\frac{\pi}{2}\right)$; áp dụng công thức (2) với $(-x)$, ta được

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1, \text{ hay } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vậy với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right)$ và $x \neq 0$ ta luôn luôn có (2).

Vì hàm số $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Theo định lí 2, từ (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

2. Điều kiện để một dãy số tăng hoặc giảm có giới hạn hữu hạn

Ta thừa nhận định lí sau :

Định lí 4

a) Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

b) Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

Áp dụng định lí 4, người ta chứng minh được sự tồn tại giới hạn hữu hạn của nhiều dãy số. Ở đây ta chỉ nêu một ví dụ quan trọng. Xét dãy số (u_n) với

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Dùng máy tính bỏ túi, ta tính được các giá trị gần đúng của các số hạng của nó :

$2 ; 2{,}25 ; 2{,}37037037 ; 2{,}44140625 ; 2{,}48832 ; \ldots ; u_{1000} \approx 2{,}71692393 ; \ldots ;$

$u_{10000} \approx 2{,}71814593 ; \ldots .$

Người ta chứng minh được rằng đây là một dãy số tăng và bị chặn trên (chẳng hạn bởi số 3). Theo định lí 4, dãy số này có giới hạn hữu hạn. Giới hạn đó được kí hiệu là e, tức là

$$\mathrm{e} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Cũng như số π, số e có một vai trò quan trọng trong toán học. Người ta đã chứng minh được rằng nó là một số vô tỉ và có giá trị là

$$\mathrm{e} = 2{,}718281828459\ldots$$

§ 5 GIỚI HẠN MỘT BÊN

Trong định nghĩa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ta giả thiết hàm số f xác định trên tập hợp $(a ; b) \setminus \{x_0\}$, trong đó $(a ; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0. Như vậy, các giá trị được xét của x là các giá trị gần x_0, bao gồm cả các giá trị lớn hơn lẫn nhỏ hơn x_0. Khái niệm giới hạn một bên xuất hiện khi ta chỉ xét các giá trị của hàm số với $x > x_0$ hoặc chỉ xét các giá trị của hàm số với $x < x_0$.

1. Giới hạn hữu hạn

ĐỊNH NGHĨA 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0 ; b)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên phải** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0 ; b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^+.$$

Định nghĩa giới hạn bên trái của hàm số được phát biểu tương tự.

ĐỊNH NGHĨA 2

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a\,;\,x_0)$ $(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên trái** là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a\,;\,x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$.
Khi đó ta viết

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{hoặc } f(x) \to L \text{ khi } x \to x_0^-.$$

Nhận xét

1) Hiển nhiên nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

2) Ta thừa nhận điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3) Các định lí 1 và định lí 2 trong §4 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^-$ hoặc $x \to x_0^+$.

Ví dụ 1. Gọi d là hàm dấu

$$d(x) = \begin{cases} -1 \text{ với } x < 0, \\ \;\;0 \text{ với } x = 0, \\ \;\;1 \text{ với } x > 0. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 0^-} d(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} d(x)$ và $\lim\limits_{x \to 0} d(x)$ (nếu có).

Giải

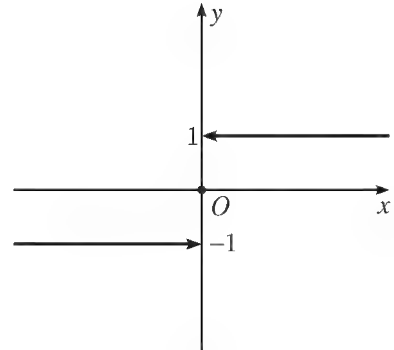
Với $x < 0$, ta có $d(x) = -1$. Do đó

$$\lim_{x \to 0^-} d(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1.$$

Tương tự, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} d(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1.$$

Vì $\lim_{x\to 0^-} d(x) \neq \lim_{x\to 0^+} d(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x\to 0} d(x)$ (h. 4.8). □



Hình 4.8

H1 *Tìm giới hạn bên phải, giới hạn bên trái và giới hạn (nếu có) của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{với } x < -1, \\ 2x^2 - 3 & \text{với } x \geq -1 \end{cases}$$

khi x dần đến -1.

2. Giới hạn vô cực

1) Các định nghĩa $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

2) Nhận xét 1 và nhận xét 2 vẫn đúng đối với giới hạn vô cực.

Ví dụ 2

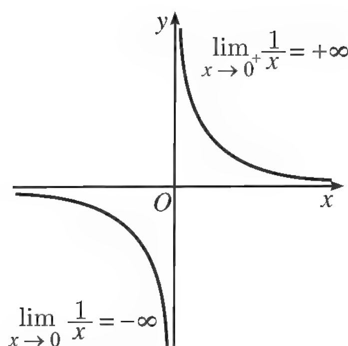
a) Từ định nghĩa giới hạn bên trái và giới hạn bên phải của hàm số, ta có

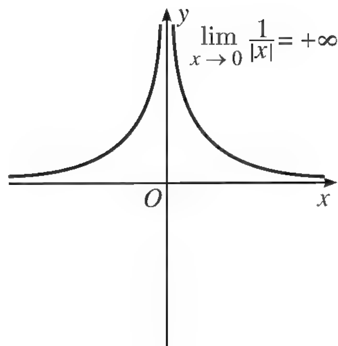
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Vì $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ nên không tồn tại $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ (h. 4.9a).

b) Dễ dàng thấy rằng $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Do đó

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ và } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty \text{ (h. 4.9b).}$$ □





Hình 4.9

H2 *Tìm* $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Câu hỏi và bài tập

26. Áp dụng định nghĩa giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm số, tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1}$;

b) $\lim_{x \to 5^-} \left(\sqrt{5-x} + 2x\right)$;

c) $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3}$;

d) $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3}$.

27. Tìm các giới hạn sau (nếu có) :

a) $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$;

b) $\lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$;

c) $\lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

28. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$;

b) $\lim_{x \to 2^-} \frac{4 - x^2}{\sqrt{2-x}}$;

c) $\lim_{x \to (-1)^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^5 + x^4}}$;

d) $\lim_{x \to 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}{\sqrt{9 - x^2}}$.

29. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| - 1 & \text{với } x \le -2, \\ \sqrt{2x^2 + 1} & \text{với } x > -2. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ (nếu có).

Luyện tập

30. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} |x^2 - 8|$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x}$;

c) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 - 3}}$;

d) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2 - 6}}$;

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{1 - x^3} - 3x}{2x^2 + x - 3}$;

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2|x + 1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3}$.

31. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\sqrt{2}} \dfrac{x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 27x}{2x^2 - 3x - 9}$;

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 + 6x + 8}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1 - x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$.

32. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5 + x^3 - 1}{(2x^2 - 1)(x^3 + x)}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)\sqrt{\dfrac{x}{2x^4 + x^2 + 1}}$.

33. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x \le 2, \\ 4x - 3 & \text{với } x > 2. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (nếu có).

§ 6 MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Các định lí trong mục 3 §4 chỉ đúng đối với các giới hạn hữu hạn, không áp dụng được cho các giới hạn vô cực. Trong mục này, ta sẽ giới thiệu một định lí liên quan đến giới hạn vô cực và hai quy tắc tìm giới hạn vô cực. Định lí và các quy tắc này được áp dụng cho mọi trường hợp :

$$x \to x_0,\quad x \to x_0^+,\quad x \to x_0^-,\quad x \to +\infty \text{ và } x \to -\infty.$$

Tuy nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x \to x_0$.

ĐỊNH LÍ

> Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Dễ dàng suy ra định lí trên từ định nghĩa giới hạn của hàm số.

Quy tắc 1

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$ được cho trong bảng sau :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)g(x)]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Ví dụ 1. Tìm

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - x^2 + 3x - 5)$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2x^3 - x^2 + 3x - 5}$.

Giải

a) Ta có

$$2x^3 - x^2 + 3x - 5 = x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right) = 2 > 0$ nên

$$\lim_{x \to -\infty}(2x^3 - x^2 + 3x - 5) = -\infty.$$

b) Vì $\lim\limits_{x \to -\infty}\left|2x^3 - x^2 + 3x - 5\right| = +\infty$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{2x^3 - x^2 + 3x - 5} = 0.$ □

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{3x^2 - 5x}$.

Giải

Với $x < 0$, ta có

$\sqrt{3x^2 - 5x} = \sqrt{x^2\left(3 - \frac{5}{x}\right)} = |x|\sqrt{3 - \frac{5}{x}}$. Vì $\lim\limits_{x \to -\infty}|x| = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{3 - \frac{5}{x}} = \sqrt{3} > 0$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty}\sqrt{3x^2 - 5x} = +\infty.$ □

H1 *Tìm* $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$.

Quy tắc 2

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau :

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to -2} (2x+1) = -3 < 0$, $\lim\limits_{x \to -2} (x+2)^2 = 0$ và $(x+2)^2 > 0$ với mọi $x \neq -2$. Do đó $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x+1}{(x+2)^2} = -\infty$. □

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$.

Giải

Vì $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2+x-2) = 4 > 0$, $\lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0$ và $x-2>0$ với mọi $x>2$ nên

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2} = +\infty.$$ □

H2 *Tìm* $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2+x-2}{x-2}$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1}$.

Giải

Chia tử và mẫu của phân thức cho x^3 (x^3 là luỹ thừa của x có bậc cao nhất trong tử và mẫu của phân thức), ta được

$$\frac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right) = 2 > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right) = 0$ và

$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) < 0$ với $x<0$ nên

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3-5x^2+1}{x^2-x+1} = -\infty.$$ □

Câu hỏi và bài tập

34. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7)$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$.

35. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x+1}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x+1}{x-2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$; d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4} \right)$.

36. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 5}{x^2 + 1}$; b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}$.

37. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \dfrac{2x+1}{2x-3} \right]$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5}{(x-1)(x^2 - 3x + 2)}$.

§ 7 CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Khi giải các bài toán về giới hạn, ta có thể gặp một số trường hợp sau đây :

1) Tìm $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$, trong đó $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ hoặc $\lim f(x) = \pm\infty$, $\lim g(x) = \pm\infty$.

2) Tìm $\lim[f(x)g(x)]$, trong đó $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \pm\infty$.

3) Tìm $\lim[f(x) - g(x)]$, trong đó $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$

hoặc $\lim f(x) = \lim g(x) = -\infty$.

(Khi $x \to x_0$, hoặc $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$).

Khi đó không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cũng như các quy tắc tìm giới hạn vô cực. Ta gọi đó là các dạng vô định và kí hiệu chúng, theo thứ tự, là

1) $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$; 2) $0.\infty$; 3) $\infty - \infty$.

Khi tìm giới hạn các dạng này, ta cần thực hiện một vài phép biến đổi để có thể sử dụng được các định lí và quy tắc đã biết. Làm như vậy gọi là *khử dạng vô định*. Sau đây là một số ví dụ.

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$ và $\dfrac{\infty}{\infty}$

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - 12x + 11}$.

Giải

Ta có dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Nhân tử và mẫu của phân thức với $x + \sqrt{2x - 1}$, ta được

$$\frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - 12x + 11} = \frac{(x - \sqrt{2x-1})(x + \sqrt{2x-1})}{(x^2 - 12x + 11)(x + \sqrt{2x-1})}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x-11)(x + \sqrt{2x-1})}$$

$$= \frac{x - 1}{(x-11)(x + \sqrt{2x-1})}, \text{ với } x \neq 1.$$

Do đó

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 - 12x + 11} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-11)(x + \sqrt{2x-1})} = 0.$$ □

H1 *Tìm* $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2}$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1}$.

Giải

Ta có dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$. Với mọi $x < 0$, ta có

$$\sqrt{x^6 - 3x} = \sqrt{x^6\left(1 - \frac{3}{x^5}\right)} = |x|^3\sqrt{1 - \frac{3}{x^5}} = -x^3\sqrt{1 - \frac{3}{x^5}}.$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} = -\frac{x^3\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^5}}}{2x^2 + 1} = -\frac{\sqrt{1 - \dfrac{3}{x^5}}}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3}}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1 - \dfrac{3}{x^5}} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 0$ và $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3} < 0$ với mọi $x < 0$ nên

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1} = +\infty.$$ □

H2 *Tìm* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^6 - 3x}}{2x^2 + 1}$.

2. Dạng 0.∞

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to2^+} (x - 2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 4}}$.

Giải

Ta có dạng vô định $0.\infty$. Với mọi $x > 2$, ta có

$$(x - 2)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = (x - 2)\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x - 2)(x + 2)}} = \frac{\sqrt{x - 2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to2^+} (x - 2)\sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x\to2^+} \frac{\sqrt{x - 2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}} = \frac{0.\sqrt{2}}{2} = 0.$$ □

3. Dạng $\infty - \infty$

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})$.

Giải

Ta có dạng vô định $\infty - \infty$. Nhân và chia biểu thức đã cho với biểu thức $\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$, ta được

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}.$$

Do đó

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = 0.$$

($\sqrt{1+x}+\sqrt{x}$ được gọi là biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt{1+x}-\sqrt{x}$). □

Câu hỏi và bài tập

38. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$;

b) $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-1}{x^2+x}$.

39. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-10}{9-3x^3}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+12}}{3|x|-17}$.

40. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^3+1)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^3+x}}$.

41. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^2}-1}{x^2-x}$.

Luyện tập

42. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-x^3+11}{2x-7}$;

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x+4}$.

43. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{3x}$.

44. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}x\sqrt{\dfrac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|+\sqrt{x^2+x}}{x+10}$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+x^2-1}}{1-2x}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{2x^2+1}+x)$.

45. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}x\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$.

§ 8 HÀM SỐ LIÊN TỤC

Trong định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm, ta không giả thiết hàm số xác định tại điểm đó. Hơn nữa, nếu hàm số xác định tại điểm được xét thì giới hạn (nếu có) và giá trị của hàm số tại điểm đó không nhất thiết bằng nhau. Tuy nhiên với những hàm số thường gặp như các hàm đa thức, các hàm phân thức hữu tỉ, các hàm số lượng giác, ..., giới hạn và giá trị của hàm số tại mỗi điểm mà nó xác định là bằng nhau. Các hàm số có tính chất vừa nêu đóng vai trò quan trọng trong Giải tích và trong các ngành Toán học khác. Người ta gọi chúng là các *hàm số liên tục*.

1. Hàm số liên tục tại một điểm

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ và $x_0 \in (a ; b)$. Hàm số f được gọi là **liên tục** tại điểm x_0 nếu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm x_0.

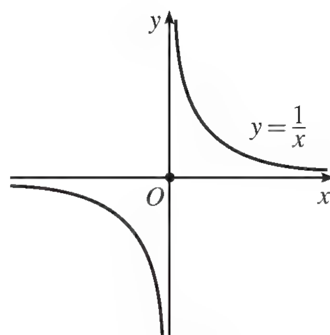
Ví dụ 1

a) Hàm số $f(x) = x^2$ liên tục tại mọi điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ vì

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 = f(x_0).$$

b) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$



Hình 4.10

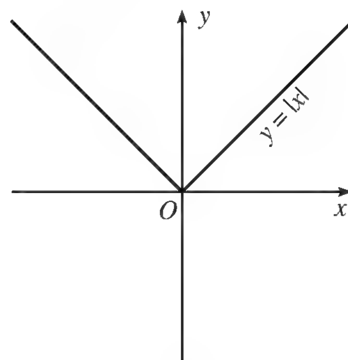
gián đoạn tại điểm $x = 0$ vì không tồn tại $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ (h. 4.10). □

H1 *Xét tính liên tục của hàm số* $f(x) = |x|$ *tại điểm* $x = 0$ (h. 4.11).

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \neq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{với } x = -1 \end{cases}$$

tại điểm $x = -1$.



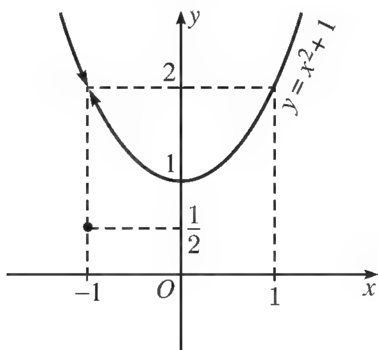
Hình 4.11

Giải

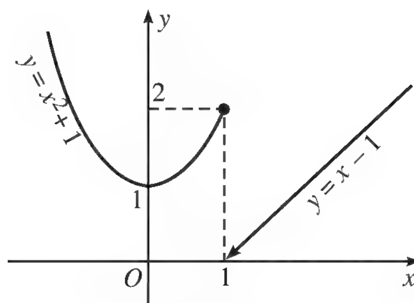
Ta có

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = 2 \text{ và } f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Vì $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$ nên hàm số f gián đoạn tại điểm $x = -1$ (h. 4.12). □



Hình 4.12



Hình 4.13

H2 *Xét tính liên tục của hàm số*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

tại điểm $x = 1$ (h. 4.13).

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

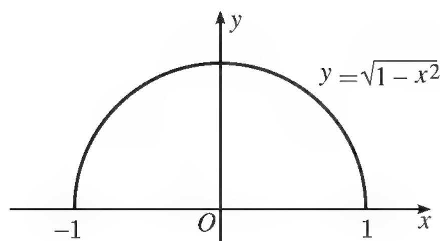
ĐỊNH NGHĨA

a) Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp J, trong đó J là một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng. Ta nói rằng **hàm số f liên tục trên J** nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc tập hợp đó.

b) Hàm số f xác định trên đoạn $[a ; b]$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a ; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a ; b)$ và

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.



Hình 4.14

Giải

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-1 ; 1]$.

Vì với mọi $x_0 \in (-1 ; 1)$ ta có

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x_0^2} = f(x_0),$$

nên hàm số f liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$. Ngoài ra, ta có

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

và
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1).$$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1 ; 1]$ (h. 4.14). □

CHÚ Ý

Tính liên tục của hàm số trên các nửa khoảng $[a ; b)$, $(a ; b]$, $[a ; +\infty)$ và $(-\infty ; b]$ được định nghĩa tương tự như tính liên tục của hàm số trên một đoạn.

H3 *Chứng minh rằng hàm số* $f(x) = \sqrt{x + 1}$ *liên tục trên nửa khoảng* $[-1 ; +\infty)$ *(tức là liên tục trên khoảng* $(-1 ; +\infty)$ *và* $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = f(-1)$).

Qua các ví dụ đã xét, chẳng hạn ví dụ 3, ta thấy hàm số liên tục trên một khoảng hoặc trên một đoạn có đồ thị là một đường "liền nét". Trong ví dụ 2, hàm số f gián đoạn tại điểm $x = -1$; đồ thị của nó không phải là một đường liền nét.

Nhận xét. Từ định lí 1 và nhận xét sau định lí 1 trong §4, dễ dàng suy ra

1) Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó (trong trường hợp thương, giá trị của mẫu tại điểm đó phải khác 0).

2) Hàm đa thức và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng).

Ta thừa nhận định lí sau

ĐỊNH LÍ 1

> Các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên tập xác định của chúng.

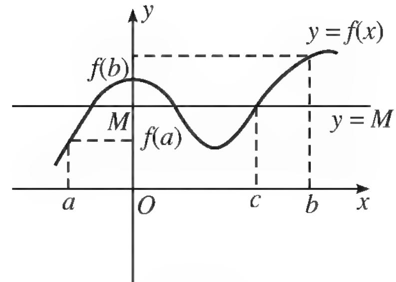
3. Tính chất của hàm số liên tục

ĐỊNH LÍ 2 (Định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

> Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho $f(c) = M$.

Ý nghĩa hình học của định lí

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a\ ;\ b)$ (h. 4.15).



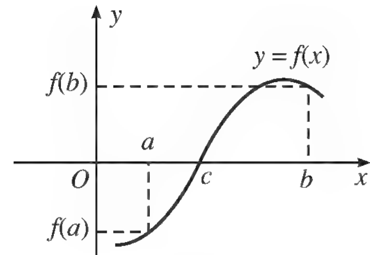
Hình 4.15

HỆ QUẢ

> Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)\,f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a\ ;\ b)$ (h. 4.16).



Hình 4.16

Ví dụ 4. Cho hàm số $P(x) = x^3 + x - 1$.

Áp dụng hệ quả, chứng minh rằng phương trình $P(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương nhỏ hơn 1.

Giải

Hàm số P liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$, $P(0) = -1$ và $P(1) = 1$.

Vì $P(0)P(1) < 0$ nên theo hệ quả, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0 ; 1)$ sao cho $P(c) = 0$.

$x = c$ chính là một nghiệm dương nhỏ hơn 1 của phương trình $P(x) = 0$. □

H4 *Cho hàm số* $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 2}{2x + 2}$. *Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm* $c \in (0 ; 2)$ *sao cho* $f(c) = -0{,}8$.

Câu hỏi và bài tập

46. Chứng minh rằng :

a) Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2, \\ 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$

liên tục tại điểm $x = 2$.

c) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{với } x \neq 1, \\ 2 & \text{với } x = 1 \end{cases}$

gián đoạn tại điểm $x = 1$.

47. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ liên tục trên khoảng $(-1 ; 1)$;

c) Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2 ; 2]$;

d) Hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên nửa khoảng $\left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right)$.

48. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau đây liên tục trên tập xác định của nó :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+1}$; b) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{2-x}$.

49. Chứng minh rằng phương trình

$$x^2\cos x+x\sin x+1=0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0\,;\pi)$.

Bài đọc thêm

TÌM GIÁ TRỊ GẦN ĐÚNG NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Ta sẽ đưa ra một kĩ thuật tìm giá trị gần đúng nghiệm của một phương trình nhờ áp dụng hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục.

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a\,;b]$ và $f(a)$, $f(b)$ trái dấu. Khi đó, khoảng $(a\,;b)$ chứa ít nhất một nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Gọi m là trung điểm của đoạn $[a\,;b]$, tức là $m=\dfrac{a+b}{2}$.

1. Nếu $f(m)=0$ thì m là một nghiệm của phương trình.

2. Nếu $f(m)\neq 0$ thì $f(m)$ trái dấu với $f(a)$ hoặc trái dấu với $f(b)$.

a) Nếu $f(m)$ trái dấu với $f(a)$ thì phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(a\,;m)$.

b) Nếu $f(m)$ trái dấu với $f(b)$ thì phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(m\,;b)$.

Giả sử xảy ra trường hợp a). Gọi m_1 là trung điểm của đoạn $[a\,;m]$, tức là $m_1=\dfrac{a+m}{2}$. Ta lại xét giá trị $f(m_1)$ như đã làm ban đầu.

Tiếp tục quá trình đó, sau một số hữu hạn bước, ta tìm được hoặc một nghiệm của phương trình hoặc giá trị gần đúng của một nghiệm với độ chính xác mong muốn vì các đoạn chứa nghiệm ngày càng "thắt" lại.

Ví dụ 1. Hàm số $f(x)=-2x^3+7x^2+6x-21$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì $f(-2)=11$ và $f(-1)=-18$, nên phương trình $-2x^3+7x^2+6x-21=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-2\,;-1)$. Ta tìm giá trị gần đúng của nghiệm đó theo cách đã nêu.

• Trung điểm của đoạn $[-2 ; -1]$ là $-1,5$; Vì $f(-1,5) = -7,5$ nên phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(-2 ; -1,5)$.

• Trung điểm của đoạn $[-2 ; -1,5]$ là $-1,75$; Vì $f(-1,75) = 0,65625$ nên phương trình có nghiệm nằm trong khoảng $(-1,75 ; -1,5)$.

Ta tiếp tục làm như vậy cho đến khi đạt được giá trị gần đúng của nghiệm với độ chính xác cần có.

Quy tắc thực hành

Trong tính toán ta không quan tâm đến các giá trị liên tiếp của $f(x)$ mà chỉ quan tâm đến dấu của chúng. Vì vậy, ta ghi các giá trị liên tiếp của x trong một bảng gồm hai cột : cột + và cột –.

• Trong cột + ta ghi các giá trị của x, tại đó $f(x)$ lấy giá trị dương.

• Trong cột – ta ghi các giá trị của x, tại đó $f(x)$ lấy giá trị âm.

• Mỗi giá trị tiếp theo của x là trung bình cộng của giá trị sau cùng của cột + và giá trị sau cùng của cột – trước nó.

• Nghiệm của phương trình nằm giữa giá trị sau cùng của cột + và giá trị sau cùng của cột –.

Chẳng hạn, với ví dụ 1, ta có bảng sau :

	+	–	
$f(-2) = 11$	-2		
		-1	$f(-1) = -18$
		$-1,5$	$f(-1,5) = -7,5$
$f(-1,75) = 0,65625$	$-1,75$		
		$-1,625$	$f(-1,625) = -3,68359375$
		$-1,6875$	$f(-1,6875) = -1,5805664063$
		$-1,71875$	

Phương trình có nghiệm x_0 thoả mãn

$$-1,75 < x_0 < -1,71875.$$

Giá trị gần đúng của nghiệm là $-1,7$ sai khác không quá $0,1$. □

Ví dụ 2. Tìm giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ với ba chữ số thập phân.

Giải

Ta thấy $\sqrt{2}$ là một nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^2 - 2 = 0.$$

Vì $f(1) = -1$ và $f(2) = 2$ nên phương trình trên có một nghiệm nằm trong khoảng $(1 ; 2)$; đó là $\sqrt{2}$ (còn nghiệm $-\sqrt{2}$ của phương trình nằm ngoài đoạn $[1 ; 2]$). Bảng sau đây cho ta giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$.

−	+
1	
	2
	1,5
1,25	
1,375	
	1,4375
1,40625	
	1,421875
1,4140625	
	1,41796875
	1,416015625
	1,4150390625
	1,41455078125

Từ bảng trên ta có

$$1{,}4140625 < \sqrt{2} < 1{,}41455078125.$$

Giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$ *là* 1,414 *sai khác không quá* 0,001. □

Luyện tập

50. Chứng minh rằng :

a) Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \le 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$$

gián đoạn tại điểm $x = 0$.

b) Mỗi hàm số

$$g(x) = \sqrt{x-3} \text{ và } h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{với } x \le 1 \\ -\dfrac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$$

liên tục trên tập xác định của nó.

51. Giải thích vì sao

a) Hàm số $f(x) = x^2 \sin x - 2\cos^2 x + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số $g(x) = \dfrac{x^3 + x\cos x + \sin x}{2\sin x + 3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

c) Hàm số $h(x) = \dfrac{(2x+1)\sin x - \cos^3 x}{x\sin x}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

52. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^2 + x + 3 + \dfrac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

53. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

54. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{với } x \neq 0 \\ -1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng $f(-1)f(2) < 0$.

b) Chứng tỏ rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1\ ;\ 2)$.

c) Điều khẳng định trong b) có mâu thuẫn với định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục hay không ?



CÔ-SI, NHÀ TOÁN HỌC LỚN

Nhà toán học Pháp Cô-si (Cauchy) là một trong những người sáng lập ra Giải tích hiện đại, đồng thời ông cũng có nhiều đóng góp sâu sắc trong các ngành toán học và khoa học khác. Ông đã để lại dấu ấn thiên tài của mình trong nền Toán học thế kỉ XIX.

Sinh ở Pa-ri, từ rất sớm ông đã ham mê toán học. Năm mười sáu tuổi ông vào học Đại học Bách khoa Pa-ri và trở thành kĩ sư. Sau đó, ông tham gia xây dựng quân cảng Sec-bua (Cherbourg). Hăng say lao động nhưng sức khoẻ không tốt, ông đành phải trở về giảng dạy Giải tích và Cơ học tại Đại học Bách khoa Pa-ri.



Augustin Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Từ thế kỉ XVIII, nhà toán học Thuỵ Sĩ Lê-ô-na Ơ-le (Leonhard Euler, 1707 – 1783) đã phát triển phép tính vi phân của nhà toán học Anh Niu-tơn (Newton, 1642 – 1727) và nhà toán học Đức Lai-bơ-nít (Leibniz, 1646 – 1716). Tuy nhiên, các khái niệm vô cực, vô cùng bé và vô cùng lớn vẫn còn tối nghĩa, không rõ ràng, lập luận còn thiếu chặt chẽ.

Trong giảng dạy, Cô-si quan tâm đặc biệt đến việc định nghĩa các khái niệm một cách chặt chẽ. Nhiều định lí và phương pháp do ông chứng minh và phát minh mang tên ông. Chính ông là người đầu tiên đã trình bày khái niệm giới hạn của hàm số bằng ngôn ngữ như hiện nay đang được giảng dạy trong các trường đại học.

Giáo trình Giải tích mà ông giảng dạy và công bố đã ngay lập tức bị các sinh viên và các đồng nghiệp phê phán bởi vì nội dung của nó vượt xa mục tiêu đào tạo các kĩ sư tương lai thời đó. Cuộc cách mạng năm 1830 đã làm gián đoạn sự nghiệp của ông. Trung thành với Sác-lơ X (Charles X), ông đã từ chối không tuyên thệ trung thành với vua Lu-i Phi-lip Đooc-lê-ăng (Louis Philippe d'Orléan), người thay thế Sác-lơ.

Ông đã bị đi đày ở Tu-rin, sau đó ở Pra-ha. Tại đây ông đã làm gia sư cho công tước Booc-đô (Bordeaux), cháu của vua Pháp bị phế truất.

Trở về Pa-ri năm 1838, tính cố chấp của ông về chính trị đối với chế độ mới đã khiến ông bỏ lỡ nhiều vị trí công tác mà nhiều người ao ước.

Cuộc Cách mạng Cộng hoà năm 1848 đã giải lời thề trung thành cho các công chức. Nhà toán học thiên tài đã hết ưu phiền và nhận ghế Giáo sư Thiên văn – Toán tại Đại học Sooc-bon (Sorbonne). Ông giảng dạy và nghiên cứu ở đó cho đến cuối đời.

Ông đã có nhiều đóng góp về Giải tích, Đại số, Hình học, Số học, Lí thuyết hàm số phức, Cơ học, Quang học, Thiên văn học, ...

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV

A. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

55. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \dfrac{2n^3 - n - 3}{5n - 1}$;

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^4 - 2n + 3}}{-2n^2 + 3}$;

c) $u_n = -2n^2 + 3n - 7$;

d) $u_n = \sqrt[3]{n^9 + 8n^2 - 7}$.

56. Tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với

a) $u_n = \sqrt{3n - 1} - \sqrt{2n - 1}$;

b) $u_n = \dfrac{4^n - 5^n}{2^n + 3.5^n}$.

57. Cho một cấp số nhân (u_n), trong đó

$$243u_8 = 32u_3 \quad \text{với } u_3 \neq 0.$$

a) Tính công bội của cấp số nhân đã cho.

b) Biết rằng tổng của cấp số nhân đã cho bằng 3^5, tính u_1.

58. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Hướng dẫn : Với mỗi số nguyên dương k, ta có $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

B. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ. HÀM SỐ LIÊN TỤC

59. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - x + 2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 5}}{2x - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to (-3)^-} \frac{x^4 + 1}{x^2 + 4x + 3}$;

d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3}{(x-2)^2} \sqrt{\frac{x+4}{4-x}}$;

e) $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \frac{\sqrt{8 + 2x} - 2}{\sqrt{x + 2}}$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2} \right)$.

60. Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{4x + 8} & \text{với } x \neq -2 \\ 3 \text{ với } x = -2 \end{cases}$$

có liên tục trên $\mathbb{R}$ không ?

61. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{với } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x = 2$.

62. Chứng minh rằng phương trình

$$x^4 - 3x^2 + 5x - 6 = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1 ; 2).

Bài tập trắc nghiệm khách quan

Trong mỗi câu của các bài từ 63 đến 65, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

63. a) $\lim \dfrac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}$ là :

(A) 1 ; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) –1 ; (D) 0.

b) $\lim \dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$ là :

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{5}$; (C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) 0.

c) $\lim \dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ là :

(A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) –1.

d) $\lim(2n-3n^3)$ là :

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 2 ; (D) – 3.

64. a) $\lim \dfrac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là :

(A) $-\dfrac{1}{3}$; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$.

b) $\lim\left(2^n-5^n\right)$ là :

(A) $+\infty$; (B) 1 ; (C) $-\infty$; (D) $\dfrac{5}{2}$.

c) $\lim\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ là :

(A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) 0 ; (D) 1.

d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ là :

(A) $+\infty$; (B) 0 ; (C) 2 ; (D) -2.

65. a) $\lim \dfrac{1-2^n}{3^n+1}$ là :

(A) $-\dfrac{2}{3}$; (B) 0 ; (C) 1 ; (D) $\dfrac{1}{2}$.

b) Tổng của cấp số nhân vô hạn

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ..., \frac{(-1)^n}{2^n}, ...$$

là :

(A) $-\dfrac{1}{4}$; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) -1 ; (D) $-\dfrac{1}{3}$.

c) Số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,5111… được biểu diễn bởi phân số

(A) $\dfrac{6}{11}$; (B) $\dfrac{46}{90}$; (C) $\dfrac{43}{90}$; (D) $\dfrac{47}{90}$.

66. a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

(A) $\lim \dfrac{2n+3}{2-3n}$; (B) $\lim \dfrac{n^2-n^3}{2n^3+1}$;

(C) $\lim \dfrac{n^2+n}{-2n-n^2}$; (D) $\lim \dfrac{n^3}{n^2+3}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

(A) $\lim \dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n}$; (B) $\lim \dfrac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$;

(C) $\lim \dfrac{2n^2-3n}{n^3+3n}$; (D) $\lim \dfrac{n^2-n+1}{2n-1}$.

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

(A) $\lim \dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$; (B) $\lim \dfrac{2^n+3}{1-2^n}$;

(C) $\lim \dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$; (D) $\lim \dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

67. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là

(A) 2 ; (B) 1 ; (C) -2 ; (D) $-\dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ là

(A) $\dfrac{5}{4}$; (B) 1 ; (C) $-\dfrac{5}{4}$; (D) –1.

68. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-3}{x^6+5x^5}$ là

(A) 2 ; (B) 0 ; (C) $-\dfrac{3}{5}$; (D) –3.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x^5+7x^3-11}{x^5+x^4-3x}$ là

(A) 0 ; (B) –3 ; (C) 3 ; (D) $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^5+x^4-3}{3x^2-7}$ là

(A) $-\infty$; (B) –2 ; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

69. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ là

(A) 1 ; (B) –1 ; (C) 0 ; (D) $+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $-\dfrac{1}{2}$; (C) $+\infty$; (D) 0.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ là

(A) 2 ; (B) –1 ; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 + 3x + 2}$ là

(A) 2 ; (B) $\dfrac{2}{3}$; (C) -1 ; (D) 0.

70. a) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + x - 1}{3x + x^2}$; (B) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x}$;

(C) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{5x^2 - x^3}$; (D) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

b) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

(A) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$; (B) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x + 5}{x + 10}$;

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$; (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

c) Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào không tồn tại ?

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$; (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$;

(C) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x + 1}}$; (D) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x}{(x + 1)^2}$.

71. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

Hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{với } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{với } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$$

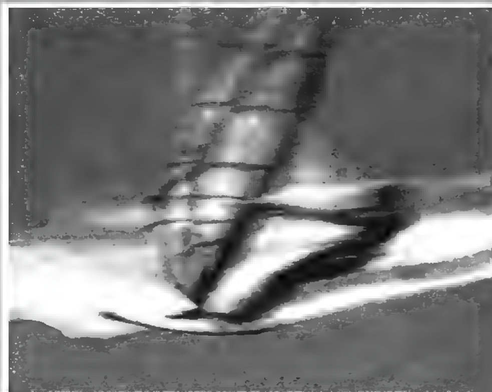
(A) Liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn [0 ; 1].

(B) Liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

(C) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 0$.

(D) Liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 1$.

Chương 5 ĐẠO HÀM



Đạo hàm là một khái niệm quan trọng của Giải tích, nó là một công cụ sắc bén để nghiên cứu các tính chất của hàm số và giúp hoàn thiện việc vẽ đồ thị hàm số.

Học sinh cần nắm vững định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm ; nhớ các công thức, các quy tắc tính đạo hàm và sử dụng thành thạo chúng.

§ 1 KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

1. Ví dụ mở đầu

Từ vị trí O (ở một độ cao nhất định nào đó), ta thả một viên bi cho rơi tự do xuống đất và nghiên cứu chuyển động của viên bi. Trong *Vật lí 10* ta đã biết : Nếu chọn trục Oy theo phương thẳng đứng, chiều dương hướng xuống đất, gốc O là vị trí ban đầu của viên bi (tại thời điểm $t = 0$) và bỏ qua sức cản của không khí thì phương trình chuyển động của viên bi là

$$y = f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ (} g \text{ là gia tốc rơi tự do, } g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2\text{).}$$

Giả sử tại thời điểm t_0, viên bi ở vị trí M_0 có toạ độ $y_0 = f(t_0)$; tại thời điểm t_1 ($t_1 > t_0$), viên bi ở vị trí M_1 có toạ độ $y_1 = f(t_1)$. Khi đó, trong khoảng thời gian từ t_0 đến t_1, quãng đường viên bi đi được là $M_0M_1 = f(t_1) - f(t_0)$ (h.5.1). Vậy *vận tốc trung bình* của viên bi trong khoảng thời gian đó là

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}. \qquad (1)$$

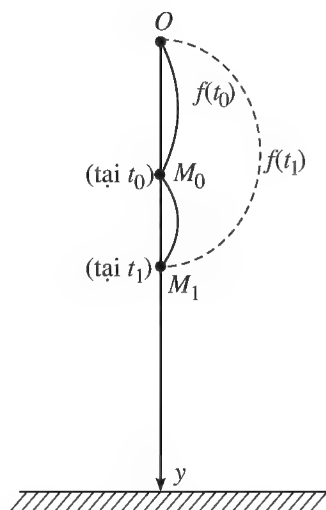
Nếu $t_1 - t_0$ càng nhỏ thì tỉ số (1) càng phản ánh chính xác hơn sự nhanh chậm của viên bi tại thời điểm t_0. Từ đó, người ta xem giới hạn của tỉ số $\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ khi t_1 dần đến t_0 là *vận tốc tức thời* tại thời điểm t_0 của viên bi, kí hiệu là $v(t_0)$. Nói cách khác,

$$v(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0} \qquad \square$$

Nhiều vấn đề của toán học, vật lí, hoá học, sinh học, ... dẫn đến bài toán tìm giới hạn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

trong đó $y = f(x)$ là hàm số nào đó.



Hình 5.1

Trong toán học, người ta gọi giới hạn đó, nếu có và hữu hạn, là *đạo hàm của hàm số* $y = f(x)$ tại điểm x_0.

2. Đạo hàm của hàm số tại một điểm

a) Khái niệm đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;\,b)$ và điểm x_0 thuộc khoảng đó.

ĐỊNH NGHĨA

Giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là **đạo hàm** của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$, nghĩa là

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Trong định nghĩa trên, nếu đặt $\Delta x = x - x_0$ và $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ thì ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

CHÚ Ý

1) Số $\Delta x = x - x_0$ được gọi là *số gia của biến số* tại điểm x_0 ; số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là *số gia của hàm số* ứng với số gia Δx tại điểm x_0.

2) Số Δx không nhất thiết chỉ mang dấu dương.

3) Δx và Δy là những kí hiệu, không nên nhầm lẫn rằng : Δx là tích của Δ với x, Δy là tích của Δ với y.

H1 *Tính số gia của hàm số $y = x^2$ ứng với số gia Δx của biến số tại điểm $x_0 = -2$.*

b) Quy tắc tính đạo hàm theo định nghĩa

Ta có quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ theo định nghĩa như sau :

QUY TẮC

> Muốn tính đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 theo định nghĩa, ta thực hiện hai bước sau :
>
> • *Bước 1*. Tính Δy theo công thức $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, trong đó Δx là số gia của biến số tại x_0
>
> • *Bước 2*. Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot$

Trong quy tắc trên và đối với mỗi hàm số được xét sau đây, ta luôn hiểu Δy là số gia của hàm số ứng với số gia Δx đã cho của biến số tại điểm đang xét.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2$ tại điểm $x_0 = 2$.

Giải. Đặt $f(x) = x^2$, ta thực hiện quy tắc trên như sau :

• Tính Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + \Delta x)^2 - 2^2 = \Delta x(4 + \Delta x).$$

• Tìm giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

Vậy $f'(2) = 4$. □

Nhận xét

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm x_0.

Thật vậy, giả sử hàm số f có đạo hàm $f'(x_0)$, tức là $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0).\, 0 = 0.$$

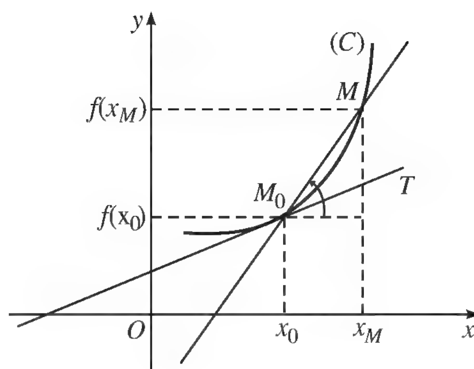
Do đó $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Điều này chứng tỏ

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Từ đó suy ra rằng hàm số f liên tục tại điểm x_0.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), một điểm M_0 cố định thuộc (C) có hoành độ x_0. Với mỗi điểm M thuộc (C) khác M_0, ta kí hiệu x_M là hoành độ của nó và k_M là hệ số góc của cát tuyến M_0M. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $k_0 = \lim\limits_{x_M \to x_0} k_M$.



Hình 5.2

Khi đó, ta coi đường thẳng M_0T đi qua M_0 và có hệ số góc k_0 là *vị trí giới hạn* của cát tuyến M_0M khi M di chuyển dọc theo (C) dần đến M_0.

Đường thẳng M_0T được gọi là *tiếp tuyến* của (C) tại điểm M_0, còn M_0 gọi là *tiếp điểm.*

Bây giờ giả sử hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0.

Chú ý rằng tại mỗi vị trí của M trên (C), ta luôn có $k_M = \dfrac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0}$ (h. 5.2).

Vì hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 nên

$$f'(x_0) = \lim_{x_M \to x_0} \frac{f(x_M) - f(x_0)}{x_M - x_0} = \lim_{x_M \to x_0} k_M = k_0.$$

Từ đó ta có thể phát biểu ý nghĩa hình học của đạo hàm như sau :

> *Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$.*

GHI NHỚ

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0(x_0 ; f(x_0))$ có phương trình là

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Giải

Trước hết ta tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại $x_0 = -1$.

• Tính Δy

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 = \Delta x\,(3 - 3\Delta x + \Delta x^2).$$

• Tính giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(3 - 3\Delta x + \Delta x^2\right) = 3.$$

Vậy $f'(-1) = 3$.

Ngoài ra, ta có $f(x_0) = (-1)^3 = -1$ nên phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = 3(x + 1) - 1, \text{ hay } y = 3x + 2.$$ □

H2 *Dựa vào kết quả của ví dụ 1, hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2$ tại điểm $M_0(2\,;4)$.*

4. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm

Xét sự chuyển động của một chất điểm. Giả sử quãng đường s đi được của nó là một hàm số $s = s(t)$ của thời gian t ($s = s(t)$ còn gọi là phương trình chuyển động của chất điểm).

Tương tự như ví dụ mở đầu, khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì tỉ số

$$\frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

càng phản ánh chính xác độ nhanh chậm của chuyển động tại thời điểm t_0. Người ta gọi giới hạn hữu hạn

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

(nếu có) là *vận tốc tức thời* của chuyển động tại thời điểm t_0.

Từ đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm như sau :

> *Vận tốc tức thời $v(t_0)$ tại thời điểm t_0 (hay vận tốc tại t_0) của một chuyển động có phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0, tức là*
>
> $$v(t_0) = s'(t_0).$$

Chẳng hạn, trong ví dụ mở đầu, ta có



$$f(t) - f(t_0) = \frac{1}{2}g\left[t^2 - t_0^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}g\left(t + t_0\right)\left(t - t_0\right).$$

Do đó đạo hàm của hàm số $y = f(t)$ là

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{2}g\left(t + t_0\right) = gt_0.$$

Vậy vận tốc của viên bi tại t_0 là $v(t_0) = f'(t_0) = gt_0$.

H3 *Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = t^2$ (t tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 2$ (giây) bằng :*

(A) 2 m/s ; (B) 3 m/s ; (C) 4 m/s ; (D) 5 m/s.

Chọn kết quả đúng trong các kết quả trên.

5. Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

a) Khái niệm

Cho hàm số f xác định trên tập J, trong đó J là một khoảng hoặc là hợp của những khoảng nào đó. Ta có định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA

1) Hàm số f gọi là **có đạo hàm trên J** nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc J.

2) Nếu hàm số f có đạo hàm trên J thì hàm số f' xác định bởi

$$f' : J \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

gọi là **đạo hàm của hàm số f.**

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ cũng được kí hiệu bởi y'.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^3$ trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$.

Giải

Với mọi x thuộc khoảng $(-\infty ; +\infty)$ ta có :

- $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x\,(3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2)$;

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$

Vậy hàm số $y = x^3$ có đạo hàm trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$ và $y' = 3x^2$. □

H4 *a) Chứng minh rằng hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.*

b) Chứng minh rằng hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Tìm đạo hàm đó.

b) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp

Ta có định lí sau :

ĐỊNH LÍ

> a) Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$;
>
> b) Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$;
>
> c) Hàm số $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$;
>
> d) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0 ; +\infty)$ và $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Chứng minh

Qua hoạt động **H4**, ta đã chứng minh các kết luận a) và b). Sau đây ta chứng minh hai kết luận còn lại.

c) Với mỗi x thuộc $\mathbb{R}$ ta tính đạo hàm của hàm số tại điểm x theo định nghĩa :

• Tính Δy : Áp dụng công thức nhị thức Niu-tơn đối với $(x + \Delta x)^n$, ta có

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + ... + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n.$$

• Tìm giới hạn (chú ý rằng $C_n^1 = n$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + ... + C_n^{n-1} x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right)$$
$$= nx^{n-1}.$$

Vậy hàm số đã cho có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = nx^{n-1}$.

d) Với mỗi x thuộc khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ ta có :

• $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

Vậy hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0\ ;\ +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. □

CHÚ Ý

Hàm số $y = |x|$ xác định tại $x = 0$, tuy nhiên người ta chứng minh được rằng nó không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Ví dụ 4

a) Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^4$.

b) Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 9$.

Giải

a) Với $y = x^4$, ta có $y' = 4x^3$ (với mọi $x \in \mathbb{R}$).

b) Với $y = \sqrt{x}$, ta có $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (với mọi $x \in (0\ ;\ +\infty)$).

Do đó $y'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$. □

H5 *Cho hàm số $y = f(x)$. Tính $f'(-1)$ và $f'(1)$ (nếu có) trong mỗi trường hợp sau :*

a) $f(x) = x^{10}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$.

Câu hỏi và bài tập

1. Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 1$ tại điểm $x_0 = 1$ ứng với số gia Δx, biết

a) $\Delta x = 1$; b) $\Delta x = -0{,}1$.

2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0.

a) $y = 2x + 1, x_0 = 2$; b) $y = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$.

3. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 (a là hằng số).

a) $y = ax + 3$; b) $y = \frac{1}{2}ax^2$.

4. Cho parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2 ; 4)$ và $B(2 + \Delta x ; 4 + \Delta y)$ trên parabol đó.

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng 1 ; 0,1 và 0,01.

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1 ;

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8 ;

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

6. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9{,}8$ m/s^2 và t được tính bằng giây (s).

a) Tìm vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ với độ chính xác 0,001, biết $t = 5$ và Δt lần lượt bằng 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

b) Tìm vận tốc tại thời điểm t = 5.

7. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^5$ trên $\mathbb{R}$ rồi suy ra $f'(-1), f'(-2)$ và $f'(2)$.

8. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau trên $\mathbb{R}$.

a) $y = ax^2$ (a là hằng số) ; b) $y = x^3 + 2$.

9. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau.

a) $y = \frac{1}{2x - 1}$ với $x \neq \frac{1}{2}$; b) $y = \sqrt{3 - x}$ với $x < 3$.

Bài đọc thêm

ĐẠO HÀM MỘT BÊN

Ta đã biết rằng đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 là giới hạn sau đây

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (1)$$

Nếu thay vì xét giới hạn (1), ta xét giới hạn một bên của cùng biểu thức đó thì giới hạn một bên ấy sẽ được gọi là *đạo hàm một bên* của hàm số đã cho tại điểm x_0.

1. Khái niệm đạo hàm một bên tại một điểm

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên nửa khoảng $[x_0 ; b)$. Giới hạn bên phải (nếu có) của tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ khi x dần đến x_0 được gọi là ***đạo hàm bên phải*** của hàm số đã cho tại điểm x_0, kí hiệu là $f'(x_0^+)$ hoặc $y'(x_0^+)$.

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái của hàm số f xác định trên nửa khoảng $(a ; x_0]$, kí hiệu là $f'(x_0^-)$ hoặc $y'(x_0^-)$, cũng được định nghĩa tương tự, nghĩa là

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải được gọi chung là *đạo hàm một bên*.

➢ Từ định nghĩa và các kết quả đã biết về giới hạn một bên, ta dễ dàng suy ra :

1) Nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thuộc khoảng đó thì nó cũng có đạo hàm bên phải và bên trái tại x_0, và $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.

2) Ngược lại, nếu hàm số f xác định trên khoảng $(a ; b)$ có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 sao cho $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ thì nó cũng có đạo hàm tại x_0.

3) Tuy nhiên, một hàm số có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại điểm x_0 vẫn có thể không có đạo hàm tại điểm x_0 (khi $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$).

➢ Sau đây là một số ví dụ.

Ví dụ 1. Xét hàm số $y = x^2$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm tại $x = 3$, do đó nó có đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái tại $x = 3$ và

$$y'(3^+) = y'(3^-) = y'(3) = 6.$$ □

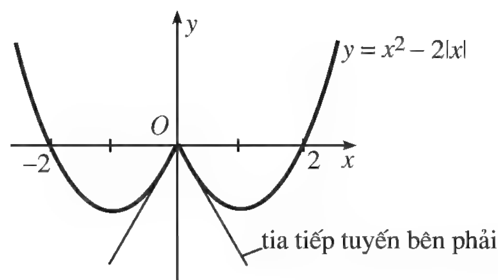
Ví dụ 2. Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2|x|$.

Ta có :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-2x}{x} = -2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{x} = 2.$$

Do đó tại điểm $x = 0$, hàm số f có đạo hàm bên phải $f'(0^+) = -2$ và đạo hàm bên trái $f'(0^-) = 2$, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó. □



Hình 5.3

➢ Cùng với khái niệm đạo hàm một bên, người ta còn xây dựng khái niệm *tia tiếp tuyến một bên* của một đường cong tại một điểm. Tia tiếp tuyến bên phải của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm M_0 có hoành độ x_0 có hệ số góc bằng đạo hàm bên phải $f'(x_0^+)$. Điều tương tự cũng xảy ra đối với tia tiếp tuyến bên trái (h.5.3).

Nếu tại điểm x_0 hàm số f có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái, nhưng chúng không bằng nhau thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ gọi là *gãy* tại điểm $M_0\,(x_0 ; f(x_0))$.

2. Đạo hàm của hàm số trên một nửa khoảng hay một đoạn

Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên tập K, trong đó, K là một nửa khoảng hay một đoạn.

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = [a ; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$ và có đạo hàm bên phải tại a.

(Tương tự nếu $K = [a ; +\infty)$).

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên nửa khoảng $K = (a ; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$ và có đạo hàm bên trái tại b.

(Tương tự nếu $K = (-\infty ; b]$).

Hàm số f gọi là có đạo hàm trên đoạn $K = [a ; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng $(a ; b)$, có đạo hàm bên phải tại a và đạo hàm bên trái tại b.

Ví dụ 3. Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm bằng 1 trên nửa khoảng $[0 ; +\infty)$ và có đạo hàm bằng -1 trên nửa khoảng $(-\infty ; 0]$.

Luyện tập

10. a) Tính $f'(3)$ và $f'(-4)$ nếu $f(x) = x^3$.

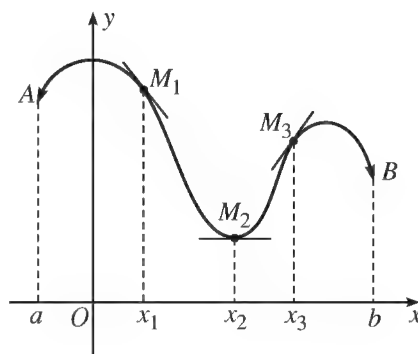
b) Tính $f'(1)$ và $f'(9)$ nếu $f(x) = \sqrt{x}$.

11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và đồ thị (G). Mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ thì tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ song song với trục hoành.

b) Nếu tiếp tuyến của (G) tại điểm $M(x_0 ; f(x_0))$ song song với trục hoành thì $f'(x_0) = 0$.

12. Hình 5.4 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a ; b)$. Biết rằng tại các điểm M_1, M_2 và M_3, đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ.
Dựa vào hình vẽ, em hãy nêu nhận xét về dấu của $f'(x_1)$, $f'(x_2)$ và $f'(x_3)$.



Hình 5.4

13. Chứng minh rằng để đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0 ; f(x_0))$, điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} a = f'(x_0) \\ ax_0 + b = f(x_0). \end{cases}$

14. Cho hàm số $y = |x|$.

a) Chứng minh rằng hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

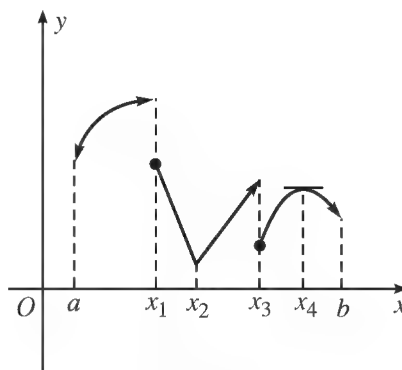
b) Tính đạo hàm của hàm số tại $x = 0$, nếu có.

c) Mệnh đề "Hàm số liên tục tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại x_0" đúng hay sai ?

15. Hình 5.5 là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$. Dựa vào hình vẽ, hãy cho biết tại mỗi điểm x_1, x_2, x_3 và x_4 :

a) Hàm số có liên tục hay không ?

b) Hàm số có đạo hàm hay không ? Hãy tính đạo hàm nếu có.



Hình 5.5



MỘT SỐ CHUYỂN ĐỘNG CÓ VẬN TỐC LỚN

* Vận tốc âm thanh : khoảng 343m/s.
* Vận tốc chuyển động của vệ tinh cách Trái Đất 200km : 22km/s.
* Vận tốc chuyển động của Trái Đất quanh Mặt Trời : 30km/s.
* Vận tốc ánh sáng : 300 000km/s.
* Vận tốc máy bay E-bớt (Airbus) : 270m/s.
* Vận tốc tên lửa đưa người lên vũ trụ : khoảng 11km/s.



§ 2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Nói chung, việc tính đạo hàm bằng định nghĩa thường rất phức tạp. Bài này sẽ cung cấp cho chúng ta những quy tắc tính đạo hàm, nhờ đó việc tính đạo hàm của một hàm số phức tạp sẽ được quy về tính đạo hàm của những hàm số đơn giản hơn.

Để tiện cho việc diễn đạt, kể từ bài này, ta sẽ sử dụng kí hiệu J để chỉ *tập con của* $\mathbb{R}$ *gồm một khoảng hoặc hợp của nhiều khoảng*.

1. Đạo hàm của tổng hay hiệu hai hàm số

ĐỊNH LÍ 1

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x) + v(x)$ và $y = u(x) - v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và

a) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$;

b) $[u(x) - v(x)]' = u'(x) - v'(x)$.

Ghi chú. Các công thức trên có thể viết gọn là

$$\boxed{(u+v)' = u' + v' \text{ và } (u-v)' = u' - v'}$$

Chứng minh

a) Tại mỗi điểm $x \in J$, ta có

• $\Delta y = \left[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)\right] - \left[u(x) + v(x)\right]$
$= \left[u(x+\Delta x) - u(x)\right] + \left[v(x+\Delta x) - v(x)\right] = \Delta u + \Delta v.$

• $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$

Vậy $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

b) Kết luận này được chứng minh tương tự. □

Nhận xét

Có thể mở rộng định lí trên cho tổng hay hiệu của nhiều hàm số : *Nếu các hàm số u, v, ..., w có đạo hàm trên J thì trên J ta có*

$$(u \pm v \pm \ldots \pm w)' = u' \pm v' \pm \ldots \pm w'.$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x^6 - \sqrt{x} + 2$ trên khoảng $(0\ ; +\infty)$.

Giải

Trên khoảng $(0\ ; +\infty)$ ta có

$$(x^6 - \sqrt{x} + 2)' = (x^6)' - (\sqrt{x})' + (2)' = 6x^5 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$$

Vậy $f'(x) = 6x^5 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$ □

H1 *a) Tính $f'(-1)$ nếu $f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 1$.*

b) Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$ và $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}\cdot$ Biết rằng hai hàm số này có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$, ta có $f'(x) = g'(x)$.

2. Đạo hàm của tích hai hàm số

Định lí 1 có thể nói gọn là : Đạo hàm của tổng (hay hiệu) hai hàm số bằng tổng (hay hiệu) các đạo hàm của hai hàm số đó.

Liệu điều tương tự có xảy ra đối với tích của hai hàm số hay không ?

Định lí sau sẽ trả lời câu hỏi đó.

ĐỊNH LÍ 2

> Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm trên J, và
>
> $$[u(x)\ v(x)]' = u'(x)\ .\ v(x) + u(x)\ .\ v'(x)\ ;$$
>
> Đặc biệt, nếu k là hằng số thì $[ku(x)]' = ku'(x)$.

Ghi chú. Các công thức trên có thể viết gọn là

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ và } (ku)' = ku'.$$

Chứng minh

Đặt $f(x) = u(x)\cdot v(x)$. Ta sẽ tìm đạo hàm của f tại một điểm x tuỳ ý thuộc J.

Khi biến số nhận số gia Δx thì $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ nên

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u.$$

Tương tự, do $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ nên

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v.$$

Ta sẽ sử dụng các đẳng thức trên để tính đạo hàm của hàm số f.

- $$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)\cdot v(x + \Delta x) - u(x)\cdot v(x)\\ &= [u(x) + \Delta u]\cdot[\ v(x) + \Delta v] - u(x)\cdot v(x)\\ &= \Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x) + u(x)\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Để ý rằng

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)\right] = \left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]v(x) = u'(x)\cdot v(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right] = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u(x)\cdot v'(x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = u'(x)\cdot v'(x)\cdot 0 = 0,$$

ta có kết quả

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Khi $v(x) = k$ (hằng số) thì $v'(x) = 0$ nên ta có $[k \cdot u(x)]' = k \cdot u'(x)$. □

H2 *Cách tính đạo hàm như sau đúng hay sai, tại sao ?*

$$[x^3(x^2 - 4)]' = (x^3)' \cdot (x^2 - 4)' = (3x^2)(2x) = 6x^3.$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $f(x) = \dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x$;

b) $f(x) = (2x^2 + 1)\sqrt{x}$.

Giải

a) $f'(x) = \left(\dfrac{x^8}{4} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x\right)' = \dfrac{1}{4}(x^8)' - \dfrac{2}{3}(x^6)' + 3(x)' = 2x^7 - 4x^5 + 3.$

b) $f'(x) = \left[(2x^2 + 1)\sqrt{x}\right]' = (2x^2 + 1)'\sqrt{x} + (2x^2 + 1)(\sqrt{x})'$

$$= 4x\sqrt{x} + (2x^2 + 1)\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ □

H3 *a) Chứng minh rằng nếu các hàm số u, v và w có đạo hàm trên J thì hàm số f xác định bởi $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ (với mọi $x \in J$) cũng có đạo hàm trên J và*

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

b) Áp dụng, tính đạo hàm của hàm số $y = x^2(1 - x)(x + 2)$ tại điểm $x = -2$.

3. Đạo hàm của thương hai hàm số

Sử dụng định nghĩa, ta cũng chứng minh được định lí sau

ĐỊNH LÍ 3

Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm trên J, và

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Ghi chú. Công thức trên có thể viết gọn là

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

H4 *Chứng minh hệ quả dưới đây*

HỆ QUẢ

a) Trên $(-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$ ta có $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

b) Nếu hàm số $v = v(x)$ có đạo hàm trên J và $v(x) \neq 0$ với mọi x thuộc J thì trên J ta có $\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

Ghi chú. Công thức thứ hai trong hệ quả trên có thể viết gọn là

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$, nếu :

a) $f(x) = \frac{1 + 9x}{x + 2a}$ (a là hằng số) ;

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Giải

a) Áp dụng định lí 3 (ở đây $u = 1 + 9x$ và $v = x + 2a$), ta có

$$f'(x) = \frac{(1 + 9x)'(x + 2a) - (1 + 9x)(x + 2a)'}{(x + 2a)^2} = \frac{9(x + 2a) - (1 + 9x)}{(x + 2a)^2}$$

$$= \frac{18a - 1}{(x + 2a)^2}.$$

b) Áp dụng hệ quả của định lí 3 (ở đây $v = x^2 - 1$), ta có

$$f'(x) = -\frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}.$$

□

H5 *Chọn kết quả đúng trong các kết quả cho sau đây.*

Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$ *bằng*

(A) $\dfrac{2x-3}{(2x-1)^2}$; (B) $-\dfrac{2x-3}{(2x-1)^2}$; (C) $\dfrac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$; (D) $\dfrac{6x^2-14x+5}{(2x-1)^2}$.

4. Đạo hàm của hàm số hợp

a) Khái niệm hàm số hợp

Ví dụ 4. Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$, trong đó

$$f(u) = u^3 \text{ và } u(x) = x^2 + 3x + 1.$$

Nếu trong $f(u)$, ta thay thế biến số u bởi $u(x)$ thì được

$$f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3.$$

Đặt $g(x) = f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3$. Rõ ràng $y = g(x)$ là một hàm số biến số x. Ta gọi g là *hàm số hợp* của hàm số f qua hàm số trung gian u. □

Một cách tổng quát, ta có khái niệm hàm số hợp như sau (ở đây ta chỉ xét các hàm số được cho bởi biểu thức).

> Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = u(x)$. Thay thế biến u trong biểu thức $f(u)$ bởi biểu thức $u(x)$, ta được biểu thức $f[u(x)]$ với biến x. Khi đó, hàm số $y = g(x)$ với $g(x) = f[u(x)]$ được gọi là **hàm số hợp** của hai hàm số f và u ; hàm số u gọi là **hàm số trung gian**.

Trong định nghĩa trên, tập xác định của hàm số hợp $y = g(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f[u(x)]$ có nghĩa.

H6 *Cho* $f(u) = \sqrt{u}$ *và* $u(x) = x - 1$. *Hãy tìm hàm số hợp* $y = f[u(x)]$ *và tập xác định của nó.*

b) Cách tính đạo hàm của hàm số hợp

ĐỊNH LÍ 4

> a) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại điểm $u_0 = u(x_0)$ thì hàm số hợp $g(x) = f[u(x)]$ có đạo hàm tại điểm x_0, và
>
> $$g'(x_0) = f'(u_0) \cdot u'(x_0).$$
>
> b) Nếu giả thiết trong phần a) được thoả mãn đối với mọi điểm x thuộc J thì hàm số hợp $y = g(x)$ có đạo hàm trên J, và
>
> $$g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x).$$

Ghi chú. Công thức thứ hai trong định lí trên còn được viết gọn là

$$\boxed{g'_x = f'_u \cdot u'_x}$$

Ví dụ 5. Đối với hàm số $g(x) = f[u(x)] = (x^2 + 3x + 1)^3$ được nêu trong ví dụ 4, ta tính đạo hàm của nó như sau :

Ta có $f'(u) = \left(u^3\right)' = 3u^2$. Do $u(x) = x^2 + 3x + 1$ nên

$$f'[u(x)] = 3(x^2 + 3x + 1)^2 \text{ và } u'(x) = (x^2 + 3x + 1)' = 2x + 3.$$

Vậy $g'(x) = f'[u(x)] \cdot u'(x) = 3(x^2 + 3x + 1)^2(2x + 3)$. □

Tổng quát ta xét hàm số $y = (u(x)^n)$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$). Có thể xem hàm số này là hàm số hợp của hàm số $f(u) = u^n$ và hàm số trung gian $u = u(x)$. Do đó, nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì ta áp dụng định lí 4 để tính đạo hàm của hàm số hợp $y = (u(x))^n$ (còn viết là $y = u^n(x)$) như sau :

$$f(u) = u^n \Rightarrow f'(u) = n \,.\, u^{n-1} \Rightarrow f'[u(x)] = n \,.\, u^{n-1}(x) \,;$$

$$\left[u^n(x)\right]' = f'[u(x)] \cdot u'(x) = n \cdot u^{n-1}(x) \cdot u'(x).$$

Vậy ta có

HỆ QUẢ 1

> Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì hàm số $y = u^n(x)$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$) có đạo hàm trên J, và
>
> $$\left[u^n(x)\right]' = n \,.\, u^{n-1}(x) \,.\, u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong hệ quả 1 được viết gọn là

$$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'.$$

Tương tự, ta xét hàm số $y = \sqrt{u(x)}$.

H7 *a) Tìm hàm số f sao cho hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ là hàm số hợp của hàm số f và hàm số trung gian $u = u(x)$.*

b) Chứng minh rằng nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ cũng có đạo hàm trên J và $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

HỆ QUẢ 2

> Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ thì hàm số $y = \sqrt{u(x)}$ có đạo hàm trên J, và
>
> $$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

Ghi chú. Công thức nêu trong hệ quả 2 được viết gọn là

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

Ví dụ 6. $\left(\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}\right)' = \dfrac{(x^4 - 3x^2 + 7)'}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}} = \dfrac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x^4 - 3x^2 + 7}}.$ □

GHI NHỚ

a) Đạo hàm của một số hàm số thường gặp (ở đây $u = u(x)$)

$(c)' = 0$ *(c là hằng số)*	
$(x)' = 1$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

b) Các quy tắc tính đạo hàm (ở đây $u = u(x)$, $v = v(x)$)

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

c) Đạo hàm của hàm số hợp (ở đây $g(x) = f[u(x)]$)

$$g'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Câu hỏi và bài tập

16. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0 được cho kèm theo

a) $y = 7 + x - x^2,\ x_0 = 1$; b) $y = x^3 - 2x + 1,\ x_0 = 2$;

c) $y = 2x^5 - 2x + 3,\ x_0 = 1$.

17. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau (a và b là hằng số)

a) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}$; b) $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$;

c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x + a^3$; d) $y = \dfrac{ax + b}{a + b}$.

18. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = (x^7 + x)^2$; b) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$;

c) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$; d) $y = \dfrac{5x - 3}{x^2 + x + 1}$;

e) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; f) $y = x(2x - 1)(3x + 2)$.

19. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = (x - x^2)^{32}$; b) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$;

c) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; d) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

20. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Hãy giải bất phương trình $f'(x) \le f(x)$.

Luyện tập

21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hãy giải bất phương trình :

a) $f'(x) > 0$; b) $f'(x) \le 3$.

22. Tìm các nghiệm của phương trình sau (làm tròn kết quả nghiệm gần đúng đến hàng phần nghìn)

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x - 1$;

b) $f'(x) = -5$ với $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 3$.

23. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$;

b) $y = \dfrac{1}{(x^2 - x + 1)^5}$;

c) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$;

d) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$;

e) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x}}$.

24. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

a) $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0 = 0$;

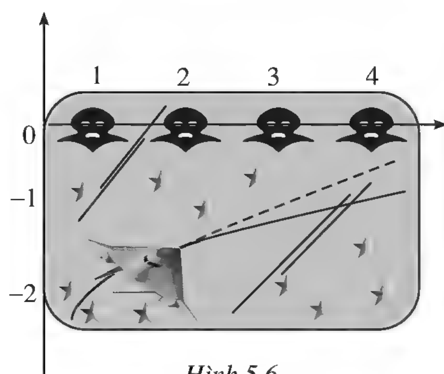
b) $y = \sqrt{x + 2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0 = 2$.

25. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0 ; -1)$.

Hướng dẫn : Trước hết viết phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 thuộc parabol đã cho. Sau đó tìm x_0 để tiếp tuyến đi qua điểm A (chú ý rằng điểm A không thuộc parabol).

26. Hình 5.6 thể hiện màn hình của một trò chơi điện tử. Một máy bay xuất hiện ở bên trái màn hình rồi bay sang phải theo một quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, trong đó $f(x) = -1 - \dfrac{1}{x}$, $(x > 0)$.

Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ các điểm thuộc (C)



Hình 5.6

sao cho tên lửa bắn ra từ đó có thể bắn trúng một trong bốn mục tiêu nằm ở trên màn hình có toạ độ (1 ; 0), (2 ; 0), (3 ; 0) và (4 ; 0) (làm tròn kết quả đến hàng phần vạn).

27. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó, viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét ?

§ 3 ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Muốn xây dựng công thức tính đạo hàm của các hàm số lượng giác, trước hết chúng ta cần nghiên cứu giới hạn cơ bản sau đây.

1. Giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

Để hình dung giá trị của giới hạn này, ta dùng máy tính bỏ túi lập bảng giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ khi x nhận các giá trị dương và rất gần điểm 0 như sau :

x *(rađian)*	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{360}$	$\frac{\pi}{720}$	$\frac{\pi}{1800}$	$\frac{\pi}{5400}$
$\frac{\sin x}{x}$	0,999949321	0,999987307	0,999996826	0,999999492	0,999999943

Qua bảng trên ta thấy khi x càng nhỏ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{x}$ càng gần đến 1.

Ta đã chứng minh được định lí sau đây (xem bài đọc thêm trang 154).

ĐỊNH LÍ 1

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

CHÚ Ý

Người ta cũng chứng minh được kết quả sau đây : Nếu hàm số $u = u(x)$ thoả mãn các điều kiện : $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 2\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right) = 2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 2.1 = 2.$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$. □

H1 *Cho* $m = \lim\limits_{x \to 0} (x \cot 3x)$. *Hãy tìm kết quả đúng trong các kết quả sau đây.*

(A) $m = 0$; (B) $m = 3$; (C) $m = 1$; (D) $m = \dfrac{1}{3}$.

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

ĐỊNH LÍ 2

> a) Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, và $(\sin x)' = \cos x$.
>
> b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì trên J ta có
>
> $$\big(\sin u(x)\big)' = \big(\cos u(x)\big) \cdot u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 2b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\sin u)' = (\cos u) . u' = u' \cos u.}$$

Chứng minh

a) Ta tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$ tại điểm x bất kì thuộc $\mathbb{R}$ bằng định nghĩa.

• $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$.

• Tìm giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left[2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right]$.

Do $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ và $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$ (vì hàm số $y = \cos x$ liên tục) nên $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$. Vậy $(\sin x)' = \cos x$. □

b) Công thức đạo hàm của $\sin(u(x))$ được suy ra từ kết quả trên và công thức lấy đạo hàm của hàm số hợp.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^3 - x + 2)$.

Giải

$[\sin(x^3 - x + 2)]' = [\cos(x^3 - x + 2)] \cdot (x^3 - x + 2)' = (3x^2 - 1)\cos(x^3 - x + 2)$. □

H2 *Cho hàm số $y = \sin\sqrt{x}$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :*

(A) $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; (B) $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; (C) $y' = \cos\sqrt{x}$; (D) $y' = \cos\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Từ công thức tính đạo hàm của hàm số $y = \sin u(x)$, ta có

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)'\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Ta suy ra định lí sau

ĐỊNH LÍ 3

> a) Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.
>
> b) Nếu hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J thì trên J ta có
>
> $$(\cos u(x))' = (-\sin u(x))\, u'(x).$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 3b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\cos u)' = (-\sin u) . u'.}$$

H3 *Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau :*

(A) $y' = \sin^2 x$; (B) $y' = -\sin^2 x$; (C) $y' = \sin 2x$; (D) $y' = -\sin 2x$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

H4 *Sử dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương hai hàm số, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.*

Từ đó suy ra định lí sau :

ĐỊNH LÍ 4

> a) Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm trên mỗi khoảng
>
> $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (với $k \in \mathbb{Z}$), và
>
> $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
>
> b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với mọi $x \in J$. Khi đó, trên J ta có
>
> $$\left(\tan u(x)\right)' = \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}.$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 4b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.}$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\tan x}$.

Giải

$$\left(\sqrt{\tan x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}}(\tan x)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\tan x}}.$$

Do $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ nên kết quả trên còn viết là

$$(\sqrt{\tan x})' = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}.$$ □

5. Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

Tương tự định lí 4, ta có

ĐỊNH LÍ 5

a) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm trên mỗi khoảng $\left(k\pi ; (k+1)\pi\right)$ (với $k \in \mathbb{Z}$), và

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm trên J và $u(x) \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) với mọi $x \in J$. Khi đó trên J ta có

$$\left(\cot u(x)\right)' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}.$$

Ghi chú. Công thức nêu trong định lí 5b) có thể viết gọn là

$$\boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.}$$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot^3 2x$.

Giải

$$\left(\cot^3 2x\right)' = 3(\cot^2 2x)(\cot 2x)' = 3(\cot^2 2x)\left(-\frac{(2x)'}{\sin^2 2x}\right) = -\frac{6\cos^2 2x}{\sin^4 2x}.$$

Vì $\frac{1}{\sin^2 2x} = 1 + \cot^2 2x$ nên kết quả trên còn viết là

$$\left(\cot^3 2x\right)' = -6(\cot^2 2x)(1 + \cot^2 2x).$$ □

H5 *Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả nêu sau đây đối với mỗi hàm số đã cho.*

a) Cho $y = \tan 2x + \cot 2x$.

(A) $y' = \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x}$; (B) $y' = \frac{2}{\sin^2 2x} - \frac{2}{\cos^2 2x}$;

(C) $y' = 2(\tan^2 2x - \cot^2 2x)$; (D) $y' = \tan^2 2x - \cot^2 2x$.

b) Cho $y = \cot(\sin 5x)$.

(A) $y' = -(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x$; (B) $y' = -5(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x$;

(C) $y' = (1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x$; (D) $y' = 5(1 + \cot^2(\sin 5x))\cos 5x$.

Câu hỏi và bài tập

28. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

29. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 5\sin x - 3\cos x$; b) $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$;

c) $y = \cos\sqrt{2x+1}$; d) $y = 2\sin 3x\cos 5x$;

e) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$; f) $y = \sqrt{\cos 2x}$.

30. Chứng minh rằng hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$ có đạo hàm bằng 0.

31. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \tan\frac{x+1}{2}$;

b) $y = \cot\sqrt{x^2+1}$;

c) $y = \tan^3 x + \cot 2x$;

d) $y = \tan 3x - \cot 3x$;

e) $y = \sqrt{1 + 2\tan x}$;

f) $y = x\cot x$.

32. Chứng minh rằng :

a) Hàm số $y = \tan x$ thoả mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$;

b) Hàm số $y = \cot 2x$ thoả mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Luyện tập

33. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x}$;

b) $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \tan 2x}$;

c) $y = \tan(\sin x)$;

d) $y = x\cot(x^2 - 1)$;

e) $y = \cos^2\sqrt{\frac{\pi}{4} - 2x}$;

f) $y = x\sqrt{\sin 3x}$.

34. Tính $f'(\pi)$ nếu $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x - x\sin x}$.

35. Giải phương trình $y' = 0$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $y = \sin 2x - 2\cos x$;

b) $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 10x$;

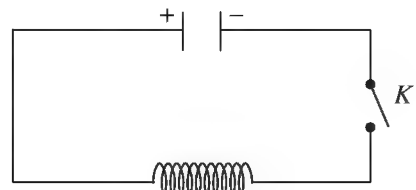
c) $y = \cos^2 x + \sin x$;

d) $y = \tan x + \cot x$.

36. Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$. Chứng minh rằng với mọi x ta có $|f'(x)| \le 8$. Tìm các giá trị của x để đẳng thức xảy ra.

37. Cho mạch điện như hình 5.7. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0. Khi đóng khoá K, tụ điện phóng điện qua cuộn dây ; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức

$$q(t) = Q_0 \sin \omega t,$$



Hình 5.7

trong đó, ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức

$$I(t) = q'(t).$$

Cho biết $Q_0 = 10^{-8}$ C và $\omega = 10^6\pi$ rad/s. Hãy tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6$ s (tính chính xác đến 10^{-5} mA).

38. Cho hàm số $y = \cos^2 x + m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị là (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau :

a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm với hoành độ $x = \pi$ có hệ số góc bằng 1.

b) Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\dfrac{\pi}{4}$ và $x = \dfrac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

§ 4 VI PHÂN

1. Vi phân của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Khi đó ta có

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Đẳng thức trên cho thấy : Nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ thì tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ rất gần với $f'(x_0)$, do đó ta có thể coi rằng $f'(x_0) \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

hay $$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x. \quad (1)$$

Ta có khái niệm vi phân của hàm số tại một điểm như sau :

> Tích $f'(x_0)\Delta x$ được gọi là *vi phân* của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 (ứng với số gia Δx) và được kí hiệu là $\mathrm{d}f(x_0)$, tức là
>
> $$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Ví dụ 1

Vi phân của hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là

$$df\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \Delta x = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \Delta x = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Delta x.$$ □

H1 *Tính vi phân của hàm số* $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ *tại điểm* $x_0 = 2$, *ứng với* Δx *lần lượt bằng* 0,2 *và* 0,02 (*làm tròn kết quả đến hàng* 10^{-3}).

2. Ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng

Từ (1) và định nghĩa vi phân của hàm số tại một điểm, ta thấy :

Khi $|\Delta x|$ khá nhỏ thì số gia của hàm số tại điểm x_0 ứng với số gia Δx xấp xỉ bằng vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx đó, tức là

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Từ đó ta có

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.} \quad (2)$$

Công thức (2) cho phép ta tính xấp xỉ giá trị của hàm số f tại điểm $x_0 + \Delta x$ khi việc tính các giá trị $f(x_0)$ và $f'(x_0)$ là khá đơn giản.

Ví dụ 2. Tính giá trị của sin30°30' (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

Giải

Do $30°30' = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}$ nên ta sẽ xét hàm số $f(x) = \sin x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ với số gia $\Delta x = \frac{\pi}{360}$. Áp dụng công thức (2), ta được

$$f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{360}, \text{ hay}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\frac{\pi}{360} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{360} \approx 0,5076.$$

Vậy $\sin 30°30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx 0,5076.$ □

Nhận xét

Nếu dùng máy tính bỏ túi, ta tính được sin30°30' ≈ 0,5075. So sánh với kết quả trên, ta thấy việc áp dụng công thức (2) cho ta kết quả khá chính xác.

3. Vi phân của hàm số

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x)\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\Delta x. \qquad (3)$$

Đặc biệt với hàm số $y = x$, ta có $\mathrm{d}x = (x)'\Delta x = \Delta x$. Do đó ta có thể viết (3) dưới dạng

$$\boxed{\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x \text{ hay } \mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x.}$$

Ví dụ 3

a) $\mathrm{d}(x^3 - 2x^2 + 1) = (x^3 - 2x^2 + 1)'\mathrm{d}x = (3x^2 - 4x)\mathrm{d}x = x(3x - 4)\mathrm{d}x.$

b) $\mathrm{d}(\sin^2 x) = (\sin^2 x)'\mathrm{d}x = (2\sin x \cos x)\mathrm{d}x = (\sin 2x)\mathrm{d}x.$ □

H2 *Hãy chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho đối với mỗi trường hợp sau đây :*

a) Vi phân của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$ *là :*

(A) $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}\mathrm{d}x$;

(B) $\mathrm{d}y = \dfrac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}\mathrm{d}x$;

(C) $\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}}\mathrm{d}x$;

(D) $\mathrm{d}y = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x - 1}}\mathrm{d}x$.

b) Vi phân của hàm số $y = \sin 3x$ *là :*

(A) $\mathrm{d}y = 3\cos 3x\, \mathrm{d}x$;

(B) $\mathrm{d}y = 3\sin 3x\, \mathrm{d}x$;

(C) $\mathrm{d}y = -3\cos 3x\mathrm{d}x$;

(D) $\mathrm{d}y = -3\sin 3x\, \mathrm{d}x$.

Câu hỏi và bài tập

39. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \sin 2x$ tại điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = 0,01$; $\Delta x = 0,001$.

40. Tính vi phân của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{a+b}$ (a và b là các hằng số) ; b) $y = x \sin x$;

c) $y = x^2 + \sin^2 x$; d) $y = \tan^3 x$.

41. Áp dụng công thức (2), tìm giá trị gần đúng của các số sau (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

a) $\dfrac{1}{0,9995}$; b) $\sqrt{0,996}$; c) $\cos 45°30'$.

§ 5 ĐẠO HÀM CẤP CAO

1. Đạo hàm cấp hai

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$. Hàm số này có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 2x$. Hiển nhiên, $y' = f'(x)$ cũng là một hàm số có đạo hàm và đạo hàm của nó là

$$[f'(x)]' = (3x^2 - 2x)' = 6x - 2.$$

Ta gọi đó là *đạo hàm cấp hai* của hàm số ban đầu.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau đây

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số f có đạo hàm f'. Nếu f' cũng có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là *đạo hàm cấp hai* của hàm f và kí hiệu là f'', tức là

$$f'' = (f')'.$$

f' còn gọi là *đạo hàm cấp một* của hàm số f. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là y''.

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm cấp hai của mỗi hàm số sau

a) $y = x^3 - 2x^2 + 1$; b) $y = \tan x$.

Giải

a) $y' = 3x^2 - 4x$; $y'' = (3x^2 - 4x)' = 6x - 4$.

b) $y' = 1 + \tan^2 x$; $y'' = (1 + \tan^2 x)' = 2\tan x\,(1 + \tan^2 x)$. □

H1 *Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số :* a) $y = \sqrt{x}$; b) $y = \sin x$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Ta đã biết : Nếu một chất điểm chuyển động có phương trình $s = s(t)$ thì vận tốc tại thời điểm t_0 của chất điểm đó là $v(t_0) = s'(t_0)$.

Bây giờ nếu t_0 nhận một số gia Δt thì $v(t_0)$ nhận một số gia là $\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)$. Khi $|\Delta t|$ càng nhỏ (khác 0) thì Δv càng phản ánh chính xác sự biến thiên vận tốc của chất điểm tại thời điểm t_0.

Trong cơ học, giới hạn hữu hạn (nếu có) của tỉ số $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ khi Δt dần đến 0 được gọi là *gia tốc tức thời tại thời điểm* t_0 (hay gia tốc tại thời điểm t_0) của chất điểm đó, và được kí hiệu là $a(t_0)$. Vậy

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Do đó, ta có thể phát biểu ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai như sau :

> *Gia tốc (tức thời) $a(t_0)$ tại thời điểm t_0 của một chất điểm chuyển động cho bởi phương trình $s = s(t)$ bằng đạo hàm cấp hai của hàm số $s = s(t)$ tại điểm t_0*, tức là
>
> $$a(t_0) = s''(t_0).$$

Gia tốc tại thời điểm t_0 đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc của chuyển động tại thời điểm đó.

Ví dụ 2. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

(Phương trình này gọi là phương trình *dao động điều hoà*). Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là

$$v(t) = S'(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t là

$$a(t) = S''(t) = v'(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).$$ □

H2 *Phương trình chuyển động của một chất điểm là $S(t) = 5t - 3t^2$ (S tính bằng mét (m), t tính bằng giây (s)). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$s.*

3. Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm cấp một f' và đạo hàm cấp hai f'' của hàm số f còn được kí hiệu lần lượt là $f^{(1)}$ và $f^{(2)}$. Nếu $f^{(2)}$ là một hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số f, kí hiệu là $f^{(3)}$. Tương tự, đạo hàm cấp n của một hàm số được định nghĩa bằng quy nạp như sau :

> Cho hàm số f có đạo hàm cấp $n - 1$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) là $f^{(n-1)}$. Nếu $f^{(n-1)}$ là hàm số có đạo hàm thì đạo hàm của nó được gọi là **đạo hàm cấp n** của hàm số f và kí hiệu là $f^{(n)}$. Nói cách khác,
>
> $$f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]', \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Đạo hàm cấp n của hàm số $y = f(x)$ còn được kí hiệu là $y^{(n)}$.

Ví dụ 3. a) Đối với hàm số $y = x^3 + 7x^2 - 4x$, ta có :

$$y' = 3x^2 + 14x - 4\ ;\quad y'' = 6x + 14\ ;\quad y^{(3)} = 6 \text{ và } y^{(n)} = 0 \text{ với mọi } n \geq 4.$$

b) Đối với hàm số $y = \sin x$, ta có :

$y' = \cos x$; $y'' = (\cos x)' = -\sin x$; $\quad y^{(3)} = y''' = (-\sin x)' = -\cos x$;

$y^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x$; $\quad y^{(5)} = (\sin x)' = \cos x$; ... □

H3 *Quan sát ví dụ 3b) và cho biết khẳng định sau đúng hay sai : Nếu $y = \sin x$ thì $y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.*

Câu hỏi và bài tập

42. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau đến cấp được cho kèm theo.

a) $f(x) = x^4 - \cos 2x$, $f^{(4)}(x)$;

b) $f(x) = \cos^2 x,\ f^{(5)}(x)$;

c) $f(x) = (x + 10)^6,\ f^{(n)}(x)$.

43. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$, ta có :

a) Nếu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ thì $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $f(x) = \cos x$ thì $f^{(4n)}(x) = \cos x$.

c) Nếu $f(x) = \sin ax$ (a là hằng số) thì $f^{(4n)}(x) = a^{4n} \sin ax$.

44. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây (s) và $v(t)$ tính bằng mét/giây (m/s). Tìm gia tốc của chất điểm

a) Tại thời điểm $t = 4$;

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11.

Luyện tập

45. Tìm vi phân của mỗi hàm số sau :

a) $y = \tan^2 3x - \cot 3x^2$;

b) $y = \sqrt{\cos^2 2x + 1}$.

46. Dùng vi phân để tính gần đúng (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn) :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{20,3}}$. *Hướng dẫn* : Xét hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tại điểm $x_0 = 20,25 = 4,5^2$ với $\Delta x = 0,05$.

b) $\tan 29°30'$. *Hướng dẫn* : Xét hàm số $y = \tan x$ tại điểm $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ với $\Delta x = -\dfrac{\pi}{360}$.

47. a) Cho hàm số $f(x) = \tan x$. Tính $f^{(n)}(x)$ với $n = 1, 2, 3$.

b) Chứng minh rằng nếu $f(x) = \sin^2 x$ thì $f^{(4n)}(x) = -2^{4n-1} \cos 2x$.

48. Chứng minh rằng :

a) Nếu $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A, B, ω và φ là những hằng số, thì $y'' + \omega^2 y = 0$.

b) Nếu $y = \sqrt{2x - x^2}$ thì $y^3 y'' + 1 = 0$.



VÀI NÉT VỀ SỰ RA ĐỜI CỦA KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

Phép tính đạo hàm hay còn được gọi là *phép tính vi phân* đã được manh nha từ nửa đầu thế kỉ XVII.

Sau khi Đề-các (Descartes 1596 – 1650) phát minh ra phương pháp xác định toạ độ một điểm trong hệ trục toạ độ vuông góc (ngày nay gọi là hệ toạ độ Đề-các vuông góc) và cách biểu diễn hàm số bằng đồ thị thì ông và nhà toán học Phéc-ma (Fermat 1601 – 1665) đã đặt ra các bài toán : Tìm tiếp tuyến của đường cong, tìm cực đại và cực tiểu của hàm số. Để giải quyết các bài toán này, các ông đã tiếp cận được điều "cốt lõi" của khái niệm đạo hàm.

Có thể xem Phéc-ma là người đi tiên phong trong lĩnh vực xây dựng "phép tính vi phân". Ông là người đầu tiên đã giải quyết một số bài toán liên quan đến vấn đề cực trị và vấn đề tiếp tuyến trên cơ sở các "vô cùng bé". Điều này không xa với khởi thuỷ của khái niệm đạo hàm.

Tuy nhiên phải đến nửa cuối thế kỉ XVII, các nhà toán học mới đặt được nền móng vững chắc cho phép tính vi phân. Các nhà toán học có công lớn trong lĩnh vực này phải kể đến Niu-tơn (Newton 1642 – 1727) và Lai-bơ-nít (Leibniz 1646 – 1716). Trong lời nói đầu của một tác phẩm của mình in năm 1684, Lai-bơ-nít đã viết :

"Với sự hiểu biết về phép tính mà tôi gọi là *vi phân*, người ta có thể giải quyết được các bài toán tìm cực đại, cực tiểu và tìm tiếp tuyến".

Đến cuối thế kỉ XVIII và đầu thế kỉ XIX, phép tính vi phân và bạn đồng hành với nó là phép tính tích phân đã được xây dựng hoàn chỉnh bởi các nhà toán học Gau-xơ (Gauss 1777 – 1855), A-ben (Abel 1802 – 1829), Cô-si (Cauchy 1789 – 1857) và Vai-ơ-xtrát (Weierstrass 1815 – 1897).

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương V

49. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + 1$;

b) $y = \frac{x^2 + 3x - a^2}{x - 1}$ (a là hằng số) ;

c) $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$;

d) $y = \tan^2 x + \tan x^2$.

50. a) Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Với $x \neq 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$, ta đặt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Từ đó hãy so sánh đẳng thức trong câu a) với công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ và nêu nhận xét.

51. Tìm đạo hàm đến cấp được nêu kèm theo của các hàm số sau ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) $y = \sin x$, y''' ;

b) $y = \sin x \sin 5x$, $y^{(4)}$;

c) $y = (4 - x)^5$, $y^{(n)}$;

d) $y = \frac{1}{2 + x}$, $y^{(n)}$;

e) $y = \frac{1}{2x + 1}$, $y^{(n)}$;

f) $y = \cos^2 x$, $y^{(2n)}$.

52. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{1}{(1 + \tan x)^2}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$ ứng với $\Delta x = \frac{\pi}{360}$ (tính chính xác đến hàng phần vạn).

53. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau :

a) Biết tung độ của tiếp điểm bằng 2 ;

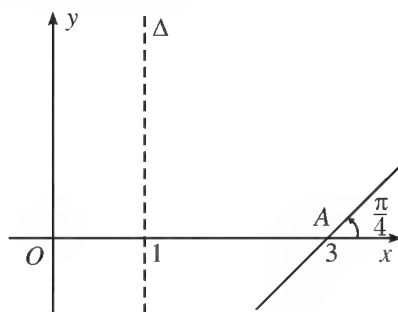
b) Biết rằng tiếp tuyến song song với trục hoành ;

c) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{8}x + 3$;

d) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0 ; -6)$.

54. Tìm một điểm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x - 1}$ sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục toạ độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

55. Đồ thị $(\mathcal{P})$ của một hàm số bậc hai $y = P(x)$ đã bị xoá đi, chỉ còn lại trục đối xứng Δ, điểm A thuộc $(\mathcal{P})$ và tiếp tuyến tại A của $(\mathcal{P})$ (h. 5.8). Hãy tìm $P(x)$ và vẽ lại đồ thị $(\mathcal{P})$.



Hình 5.8

56. Cho parabol $(\mathcal{P}) : y = x^2$. Gọi M_1 và M_2 là hai điểm thuộc $(\mathcal{P})$, lần lượt có hoành độ là $x_1 = -2$ và $x_2 = 1$.

Hãy tìm trên $(\mathcal{P})$ một điểm C sao cho tiếp tuyến tại C song song với cát tuyến M_1M_2. Viết phương trình của tiếp tuyến đó.

57. Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$, ở đó, $t > 0$, t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m).

a) Tính vận tốc tại thời điểm $t = 2$.

b) Tính gia tốc tại thời điểm $t = 3$.

c) Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc bằng 0.

d) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng 0.

Bài tập trắc nghiệm khách quan

58. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

b) Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

c) Hàm số $y = |x|$ có đạo hàm tại mọi điểm mà nó xác định.

Với mỗi bài từ 59 đến bài 62, hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả đã cho.

59. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{4}{x-1}$ tại điểm với hoành độ $x = -1$ có phương trình là

(A) $y = -x - 3$; (B) $y = -x + 2$; (C) $y = x - 1$; (D) $y = x + 2$.

60. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ tại điểm với hoành độ $x = \dfrac{1}{2}$ có phương trình là

(A) $2x - 2y = -1$; (B) $2x - 2y = 1$; (C) $2x + 2y = 3$; (D) $2x + 2y = -3$.

61. Hàm số có đạo hàm bằng $2x + \dfrac{1}{x^2}$ là

(A) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$; (B) $y = \dfrac{x^3 + 5x - 1}{x}$;

(C) $y = \dfrac{3(x^2 + x)}{x^3}$; (D) $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x}$.

62. Đạo hàm cấp 2010 của hàm số $y = \cos x$ là

(A) $\sin x$; (B) $-\sin x$; (C) $\cos x$; (D) $-\cos x$.

63. Điền nội dung thích hợp vào chỗ trống.

a) Hàm số hợp của hàm số $y = \cot u$ và hàm số trung gian $u = \sqrt{x}$ là $y =$ ....

b) Hàm số hợp của hàm số $y = u^n$ và hàm số trung gian $u = \cos x + \sin x$ là $y =$ .....

c) Hàm số $y = \tan 3x$ là hàm số hợp của hàm số $y =$ .... và hàm số trung gian $u =$ ....

d) Hàm số $y = \sqrt{\cos x}$ là hàm số hợp của hàm số $y =$ .... và hàm số trung gian $u =$ ....

Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm

1. a) Tính $\sin\frac{\pi}{8}$ và $\cos\frac{\pi}{8}$.

b) Chứng minh rằng có hằng số $C > 0$ để có đẳng thức

$$\sin x + (\sqrt{2} - 1)\cos x = C\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \text{ với mọi } x.$$

2. Giải phương trình

$$\tan x = \cot 2x.$$

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác.

3. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P(x) = (\sin x + \cos x)^3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $R(x) = P(x) + Q(x)$.

4. Giải các phương trình :

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$;

b) $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2\dfrac{\pi}{4}$;

c) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$;

d) $\tan 2x - \sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $2\sin(x + 10^o) - \sqrt{12}\cos(x + 10^o) = 3$;

b) $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\cos 3x$;

c) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

6. Giải các phương trình sau :

a) $2\tan^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}$; b) $\tan^2 x = \dfrac{1 + \cos x}{1 + \sin x}$;

c) $\tan x + \tan 2x = \dfrac{\sin 3x}{\cos x}$.

7. Một đoàn tàu nhỏ có 3 toa khách đỗ ở sân ga. Có 3 hành khách bước lên tàu. Hỏi :

a) Có bao nhiêu khả năng trong đó 3 hành khách lên 3 toa khác nhau ?

b) Có bao nhiêu khả năng trong đó 2 hành khách cùng lên một toa, còn hành khách thứ ba thì lên toa khác ?

8. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$ với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Hỏi có bao nhiêu cặp $(x ; y)$ với $x \in A$, $y \in A$ và $x > y$?

9. Một túi chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen và 3 viên bi đỏ.

a) Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong túi.

– Tính xác suất để được 2 viên bi đen.

– Tính xác suất để được 1 viên bi đen và 1 viên bi trắng.

b) Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi trong túi.

– Tính xác suất để được 3 viên bi đỏ.

– Tính xác suất để được 3 viên bi với 3 màu khác nhau.

10. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số điểm mà một vận động viên bắn cung nhận được khi bắn một lần. Giả sử X có bảng phân bố xác suất như sau :

X	9	7	5	3	1
P	0,2	0,36	0,23	0,14	0,07

a) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn một lần.

b) Tính điểm trung bình khi vận động viên đó bắn 48 lần.

11. Ta đã biết $\cos\dfrac{\pi}{2^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$. Chứng minh rằng :

a) $\cos\dfrac{\pi}{2^3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$;

b) $\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \dfrac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n-1 \text{ dấu căn}}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$.

12. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 3 \text{ và } u_n = 4u_{n-1} - 1 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng :

a) $u_n = \dfrac{2^{2n+1}+1}{3}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$;

b) (u_n) là một dãy số tăng.

13. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 5 \text{ và } u_n = u_{n-1} - 2 \text{ với mọi } n \geq 2.$$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Hãy tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 2 \text{ và } u_n = 3u_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Hãy tính tổng 10 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

15. Các số $x - y$, $x + y$ và $3x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng, đồng thời các số $x - 2$, $y + 2$ và $2x + 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm x và y.

16. Tính giới hạn của các dãy số sau :

a) $\lim \dfrac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$;

b) $\lim \dfrac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$;

d) $\lim \dfrac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n}$.

17. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim \sqrt{3n^4 - 10n + 12}$;

b) $\lim (2.3^n - 5.4^n)$;

c) $\lim \left(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2\right)$;

d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$.

18. Tìm số hạng đầu và công bội của một cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\dfrac{12}{5}$ và tổng của cấp số nhân này là 15.

19. Tính giới hạn của các hàm số sau :

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x + 10}{x^3 + 6}$;

b) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 11x + 30}{25 - x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^6 + 4x^2 + x - 2}{\left(x^3 + 2\right)^2}$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 40}{2x^5 + 7x^4 + 21}$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^4 + 4x^2 + 3}}{2x + 1}$;

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1)\sqrt{\dfrac{x + 1}{2x^3 + x}}$;

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2 + 11x - 100}$;

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 1} - x\sqrt{5}\right)$;

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$.

20. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm.

21. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + c}{(a + b)x}$ (a, b, c là các hằng số) ;

b) $y = \left(x^3 - \dfrac{1}{x^3} + 3\right)^4$;

c) $y = x^3\cos^2 x$;

d) $y = \sin\sqrt{4 + x^2}$;

e) $y = \sqrt{1 + \tan\left(x + \dfrac{1}{x}\right)}$.

22. Cho hàm số $y = mx^3 + x^2 + x - 5$. Tìm m để :

a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất ;

b) y' có hai nghiệm trái dấu ;

c) $y' > 0$ với mọi x.

23. Giải các phương trình sau :

a) $y' = 0$, với $y = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \sin x - 3$;

b) $y' = 0$, với $y = \sin 3x - 2\cos 3x - 3x + 4$.

24. Cho hyperbol $(\mathcal{H})$ xác định bởi phương trình $y = \dfrac{1}{x}$.

a) Tìm phương trình tiếp tuyến (T) của $(\mathcal{H})$ tại tiếp điểm A có hoành độ a (với $a \neq 0$).

b) Giả sử (T) cắt trục Ox tại điểm I và cắt trục Oy tại điểm J. Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng IJ. Từ đó suy ra cách vẽ tiếp tuyến (T).

c) Chứng minh rằng diện tích tam giác OIJ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A.

25. Một điểm M chuyển động trên parabol $y = -x^2 + 17x - 66$ theo hướng tăng của x. Một người quan sát đứng ở vị trí $P(2 ; 0)$.

Hãy xác định các giá trị của hoành độ điểm M để người quan sát có thể nhìn thấy được điểm M.

HƯỚNG DẪN GIẢI, ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP

CHƯƠNG I

1. a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$;

d) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. **2.** a) Lẻ ; b) Không lẻ, không chẵn ; c) Không lẻ, không chẵn ; d) Lẻ. **3.** a) 5 và 1 ; b) $\sqrt{2} - 1$ và -1 ; c) 4 và -4. **5.** a) Sai. *HD :* Xét khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$; b) Đúng. *HD :* Sử dụng công thức $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. **6.** b)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$2x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\sin 2x$	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	0

7. a) Không lẻ, không chẵn ; b) Chẵn ; c) Lẻ. **10.** *HD :* Chú ý đến các giao điểm của đường thẳng $y = \frac{x}{3}$ với các đường thẳng $y = \pm 1$.

13. b)

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
$\frac{x}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\frac{x}{2}$	-1 ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1

14. a) $\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}$;

b) $-\frac{11\pi}{6} + k10\pi, \frac{29\pi}{6} + k10\pi$;

c) $\pm 2\sqrt{2} + k4\pi$; d) $\pm\alpha - \frac{\pi}{18} + k2\pi$,

với $\cos\alpha = \frac{2}{5}$; **16.** a) $\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$;

b) $5 - \frac{11\pi}{6}, 5 - \frac{13\pi}{6}$. **17.** a) Có 12 giờ ánh sáng vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm ; b) Ít giờ có ánh sáng nhất (9 giờ) vào ngày thứ 353 trong năm ; c) Nhiều giờ có ánh sáng nhất (15 giờ) vào ngày thứ 171 trong năm.

18. a) $\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}$; b) $a + 15^o + k180^o$, với $\tan a = 5$ (có thể chọn $a \approx 78^o41'24"$) ; c) $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}$;

d) $-\frac{1}{6} + k\frac{\pi}{2}$; e) $-200^o + k720^o$;

f) $\frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$.

20. a) $-150^o, -60^o, 30^o$; b) $-\frac{4\pi}{9}, -\frac{\pi}{9}$.

21. Cả hai bạn đều giải đúng. **22.** $\widehat{B} = 45^o$, $\widehat{C} \approx 35^o15'52"$, $\widehat{A} \approx 99^o44'8"$ hoặc $\widehat{B} = 135^o$, $\widehat{C} \approx 35^o15'52"$, $\widehat{A} \approx 9^o44'8"$.

23. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{m\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}, m = 1 ; 3\}$;

b) $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{2\pi}{3} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$;

d) $\mathbb{R} \setminus \left(\left\{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \cup \left\{k\frac{\pi}{2} \middle| \in \mathbb{Z}\right\}$.

24. a) $h \approx 3064{,}178$(km) ; b) 25 phút. *HD :* Xét phương trình $4000\cos\left[\frac{\pi}{45}(t - 10)\right] = 2000$ và tìm nghiệm dương nhỏ nhất của nó ; c) 37 phút. *HD :* Tương tự phần a).

25. a) 0 phút, 1 phút, 2 phút, 3 phút, ...
b) 0,5 phút ; 1,5 phút ; 2,5 phút ; 3,5 phút ; ...
c) $\frac{1}{4}$ phút. **26.** a) $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}$;
b) $-210^o + k360^o, 70^o + k120^o$;

27. a) $\pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$; b) $\frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$;

c) $-\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $\pm\frac{\pi}{8}+k\pi$.

28. a) $k2\pi, \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$; b) $-\frac{\pi}{2}+k2\pi$;

c) $\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi$.

29. a) $\approx -0,34$; b) $\approx 1,21$; c) $\approx 0,20$; $\approx 2,68$; d) $\approx 0,34$.

HD : $x \in \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 3x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

30. a) $\alpha+(2k+1)\pi$, với $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$;

b) $\frac{5\pi}{24}+k\pi, \frac{13\pi}{24}+k\pi$;

c) Vô nghiệm.

31. a) $t \approx 0,11$ (s) và $t \approx 0,64$ (s).

HD : $5\sin 6t - 4\cos 6t$

$$= \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\sin 6t - \frac{4}{\sqrt{41}}\cos 6t\right)$$

$$= \sqrt{41}\sin(6t-\alpha) \text{ với}$$

$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{41}}$ và $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{41}}$.

Chọn $\alpha \approx 0,675$ và tìm nghiệm của phương trình $\sin(6t-\alpha)=0$ thoả mãn $0 \le t \le 1$.

b) $t \approx 0,37$ (s) và $t \approx 0,90$ (s). *HD* : Tìm nghiệm của phương trình $\sin(6t-\alpha) = \pm 1$ thoả mãn $0 \le t \le 1$. **32.** a) $\sqrt{a^2+b^2}$ và $-\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{2}+2$ và $-\frac{\sqrt{5}}{2}+2$

33. a) Vô nghiệm ;

b) $-\frac{\pi}{3}+k\pi$, $\arctan\left(-\frac{8}{3}+\sqrt{3}\right)+k\pi$;

c) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\arctan(-5)+k\pi$. **34.** a) $k\pi, k\frac{\pi}{3}$;

b) $k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{14}+k\frac{\pi}{7}$; c) $k\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{3}$. (*Chú ý* : họ $k\pi$ nằm trong họ $k\frac{\pi}{2}$) ; d) $\pi+k2\pi, \frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}$.

35. a) $k\frac{\pi}{2}, k\frac{\pi}{5}$. (*Chú ý* : họ $\frac{\pi}{2}+k\pi$ nằm trong họ $k\frac{\pi}{2}$) ; b) $\frac{\pi}{10}+k\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\pi$.

36. a) $k2\pi$; b) $80^o + k180^o$;

c) $k\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi$. *HD* : Đặt $t=\tan x$.

d) $k\frac{\pi}{3}$ · (*Chú ý* : họ $k\pi$ nằm trong họ $k\frac{\pi}{3}$) ;

e) $k\frac{\pi}{3}$ với k nguyên và không chia hết cho 3.

37. a) $\frac{1}{2}$s và 2s. *HD* : Tìm t thoả mãn $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=\pm 1$ và $0\le t\le 2$.

b) $t\approx 0,10$s ; $t\approx 0,90$s và $t\approx 1,60$s. *HD* : Tìm t thoả mãn $3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=\pm 2$ và $0\le t\le 2$.

38. a) $\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; b) $\frac{\pi}{4}+k\pi$.

HD : Đặt $y=\tan x+\cot x$ với $|y|\ge 2$;

c) $\arctan\frac{1}{2}+k\pi$. **39.** a) Vô nghiệm, *HD* : Đưa về dạng $\sin(x-\alpha)=m$ với $|m|>1$;

b) *HD* : Đặt $t=\sin x+\cos x$. **40.** a) $90^o, 270^o$;

b) 225^o, $\approx 243^o26'5,8''$. **41.** a) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)+k\pi$; b) $\frac{1}{2}\arctan(-2)+k\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{2}\arctan 3+k\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{6}+k\pi$.

42. a) $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$; b) $\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{3}$; c) Vô nghiệm. *HD* : *Chú ý* ĐKXĐ là $\sin 4x\ne 0$; d) $k2\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi, -\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

43. a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Sai ; f) Đúng ; g) Sai. **45.** a) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)$;

b) $\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}\sin\left(x+\frac{5\pi}{14}\right)$. **46.** a) $\frac{7\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{7\pi}{6}+k2\pi$. *HD* : Để ý rằng $\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$; b) 30^o+k120^o ;

c) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi$; d) $\frac{\pi}{4}+k\pi$, $\arctan\left(-\frac{2}{5}\right)+k\pi$. **47.** a) $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}+k\frac{\pi}{2}$;

b) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi$;

c) $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $2\arctan(-5)+k2\pi$. *HD* : Viết vế phải dưới dạng $\frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$.

48. b) $\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $\frac{4\pi}{3}+k2\pi$.

49. $\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $\frac{5\pi}{6}+k2\pi$.

50. b) $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $-\frac{\pi}{4}+k\pi$ và $\arctan\frac{1}{2}+k\pi$

(*HD* : Nếu $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, đặt $t=\tan x$).

51. (B). **52.** (C). **53.** (D). **54.** (A). **55.** (C). **56.** (D). **57.** (B). **58.** (A). **59.** (C). **60.** (A). **61.** (D). **62.** (B). **63.** (D).

CHƯƠNG II

1. 9. **2.** 20. **3.** a) 605 ; b) 91 000. **4.** a) 256 ; b) 24. **5.** 120. **6.** 336. **7.** a) $\frac{n(n-1)}{2}$; b) $n(n-1)$. **8.** a) 35 ; b) 210. **9.** 1 048 576. **10.** 180 000. **11.** 252. **12.** 15. **13.** a) 1365 ; b) 2730. **14.** a) 94 109 400 ; b) 941 094 ; c) 3 764 376. **15.** 196. **16.** 126.

17. $-C_{200}^{101}2^{101}3^{99}$. **18.** 1287. **19.** 330

20. –94 595 072. **21.** $1+30x+405x^2+3240x^3$.

22. $-C_{15}^{7}3^{8}2^{7}$. **23.** 3003. **24.** 32. **25.** c) 0,3 ; d) 0,06.

26. a) 0,5 ; b) 0,25. **27.** a) $\frac{1}{30}$; b) $\frac{29}{30}$; c) $\frac{11}{30}$.

28. b) $P(A)=\frac{7}{12}$; c) $P(B)=\frac{11}{36}$; $P(C)=\frac{5}{18}$.

29. $\frac{C_{10}^5}{C_{20}^5}\approx 0{,}016$. **30.** a) $\frac{C_{99}^5}{C_{199}^5}\approx 0{,}029$; b) $\frac{C_{50}^5}{C_{199}^5}\approx 0{,}0009$. **31.** $\frac{97}{105}$. **32.** $\frac{30}{49}$. **33.** $\frac{2}{9}$

34. a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{3}{8}$.

35. a) 0,384 ; b) 0,488. **36.** a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{64}$.

37. $(0{,}8)^{10}\approx 0{,}1074$. **38.** $\frac{23}{144}$. **39.** a) Không xung khắc ; b) Không độc lập. **40.** $n=6$.

41. $\frac{5}{36}$. **42.** $\frac{25}{216}$. **43.** Có. **44.**

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

45. a) 0,35 ; b) 0,85. **46.** 0,35. **47.** E(*X*) = 1,5 ; V(*X*) = 0,75 ; σ(*X*) ≈ 0,87. **48.** E(*X*) = 2,05 ; V(*X*) ≈ 1,85 ; σ(*X*) ≈ 1,36 ; **49.** E(*X*) = 1,85 ; V(*X*) ≈ 2,83 ; σ(*X*) ≈ 1,68. **50.**

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	0,5	0,3	$\frac{1}{30}$

51. a) 0,8 ; b) 0,2 ; c) 2,2. **52.** a) 0,72 ; b) 0,27.
53. E(*X*) = 1,875 ; V(*X*) ≈ 0,609 ; σ(*X*) ≈ 0,781.
54. E(*X*) = 18,375 ; V(*X*) ≈ 5,484 ; σ(*X*) ≈ 2,342.
55. 168. **56.** 24. **57.** a) 512 ; b) 315. **58.** 126.
59. a) 12 650 ; b) 13 800. **60.** $C_{17}^{8}3^{8}2^{9}$.

61. a) 0,334 ; b) 0,2. **62.** $\frac{1}{C_{52}^5}$.

63. $1-\frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}\approx 0{,}341$. **64.** 0,96.

65. a) 0,992 ; b) 0,08. **66.** a) 0,9 ; b) 0,9.

67. a)

X	5	6	7	8	9	10	11
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b) E(*X*) = 7,75.

68. a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

b) $E(X)=\frac{9}{7}$; V(*X*) ≈ 0,49.

69. C). **70.** A). **71.** B). **72.** B). **73.** B).

CHƯƠNG III

11. $u_{n+1} = \sqrt{(u_n - 1)^2 + 1}$. **12.** *Gợi ý :* Chứng minh bằng phương pháp quy nạp. **13.** a) Tăng ; b) Giảm ; c) Giảm. **14.** *Gợi ý :* Viết lại công thức xác định u_n dưới dạng : $u_n = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3n+2)}$. **20.** *Gợi ý* : Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n. *Đáp số* : Công sai $d = \frac{\pi}{4}$. **22.** 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23. **25.** Công sai $d = -3$ và $u_n = 5 - 3n$. **27.** 690. **28.** 30^o ; 60^o ; 90^o. **31.** $u_1 = -\frac{8}{3}$. **32.** 2 ; 1 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$. **34.** $u_n = -5 . (-3)^{n-3}$. **35.** $\approx 2{,}22.10^{-15}$ gam. **36.** a) 59 040 ; b) $\frac{2\,731}{1\,048\,576}$. **37.** 24^o ; 48^o ; 96^o ; 192^o. **39.** $x = -6$, $y = -2$. **40.** q = –2. **41.** q = –2. **42.** 4, $\frac{16}{3}$, $\frac{64}{9}$; $\frac{148}{27}$, $\frac{148}{27}$, $\frac{148}{27}$. **44.** *Gợi ý :* Sử dụng phương pháp quy nạp. **45.** *Gợi ý :* Sử dụng phương pháp quy nạp. **51.** a) $u_2 = 8500$, $u_3 = 9000$, $v_2 = 6420$, $v_3 = 6869{,}4$; b) $u_n = 7500 + 500n$, $v_n = 6000 . (1{,}07)^{n-1}$; c) Cơ sở *B* ; d) Cơ sở *A*. **52.** a) Sai ; b) Sai ; c) Đúng. **53.** (B) ; **54.** (B). **55.** (A). **56.** (C). **57.** (D).

CHƯƠNG IV

1. a) *HD*. $\left|\frac{(-1)^n}{n+5}\right| < \frac{1}{n}$ với mọi *n*.

2. *HD*. $|v_n| < \frac{1}{n^2}$ với mọi *n*. **5.** a) 2 ; b) –1 ; c) 1 ; d) 1. **6.** a) $\frac{1}{2}$, b) 0 ; c) 0 ; d) 1. *HD :* Chia cả tử và mẫu của phân thức cho 4^n. **7.** a) *HD*. $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ với mọi *n* ; b) $\frac{15}{4}$. **8.** a) 0 và 0 ; b) $p_1 + p_2 + ... = 3a$; $S_1 + S_2 + ... = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

9. a) $\frac{4}{9}$; b) $\frac{21}{99}$; c) $\frac{289}{900}$. **10.** a) $p_n = \pi R$; $S_n = \frac{\pi R^2}{2}.\frac{1}{2^n}$; b) $\lim p_n = \pi R$; $\lim S_n = 0$.
11. a) $-\infty$; b) $+\infty$. **12.** a) $-\infty$; b) $+\infty$.
13. a) $+\infty$; b) $+\infty$. **15.** a) $+\infty$; b) $-\infty$.
16. a) 0 ; b) $+\infty$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\frac{2}{3}$.
17. a) $+\infty$; b) $+\infty$; c) $-\infty$; d) $+\infty$. **18.** a) $\frac{1}{2}$; b) $+\infty$; c) $+\infty$; d) 0 ; e) $+\infty$; f) $\frac{1}{3}$. **19.** $u_1 = 1$; $q = \frac{2}{5}$. **20.** a) $+\infty$;
b) $S_n = \frac{4}{3}S + \left(\frac{S}{3}\right)\frac{4}{9} + \left(\frac{S}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^2 + ... + \left(\frac{S}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$ với $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $\lim S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}a^2$. **21.** a) –5 ; b) $\frac{1}{2}$. **22.** a) 0, 0, 1 và 0 ; b) không tồn tại.
23. a) 37 ; b) 0 ; c) –1 ; d) $-\frac{1}{54}$; e) 1 ; f) $\sqrt{3}$.
24. a) 0 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{3}$; d) $-\frac{1}{3}$. **25.** a) $\frac{1}{2}$; b) 0.
26. a) 0 ; b) 10 ; c) $+\infty$; d) $-\infty$. **27.** a) 1 ; b) –1 ; c) Không tồn tại. **28.** a) –2 ; b) 0 ; c) 0 ; d) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.
29. 3 ; 3 và 3. **30.** a) 5 ; b) $\frac{7}{8}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) 2 ; e) 3 ; f) 3. **31.** a) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$; b) 9 ; c) –16 ; d) 1. **32.** a) 1 ; b) 2 ; c) $\frac{1}{2}$; d) 0. **33.** 5 ; 3 ; Không tồn tại. **34.** a) $-\infty$; b) $+\infty$. **35.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $-\infty$; d) $-\infty$. **36.** a) $+\infty$; b) $+\infty$. **37.** a) $-\infty$; b) $-\infty$. **38.** a) 3 ; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) 0. **39.** a) 0 ; b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **40.** a) 0 ; b) 1. **41.** a) 0 ; b) 0. **42.** a) $+\infty$; b) 12 ; c) $\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $+\infty$; f) $-\infty$. **43.** a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{1}{16}$; c) $+\infty$; d) $\frac{1}{6}$. **44.** a) $-\sqrt{2}$; b) –2 ;

c) $-\infty$; d) $+\infty$. **45.** a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0 ; d) $+\infty$.

55. a) $+\infty$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $-\infty$; d) $+\infty$. **56.** a) $+\infty$; b) $-\frac{1}{3}$. **57.** a) $\frac{2}{3}$; b) 81.

58. 1. *HD.* $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. **59.** a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $+\infty$; d) $+\infty$; e) 0 ; f) $-\frac{1}{2}$. **60.** f liên tục trên $\mathbb{R}$. **61.** $m = -\frac{1}{6}$. **63.** a) (B) ; b) (C) ; c) (A) ; d) (B). **64.** a) (D) ; b) (C) ; c) (C) ; d) (C). **65.** a) (B) ; b) (D) ; c) (B). **66.** a) (C) ; b) (D) ; c) (A). **67.** a) (C) ; b) (D) ; c) (A). **68.** a) (B) ; b) (B) ; c) (D). **69.** a) (A) ; b) (B) ; c) (C) ; d) (C). **70.** a) (C) ; b) (D) ; c) (B). **71.** (B).

CHƯƠNG V

1. a) 3 ; b) –0,19. **2.** a) 2 ; b) 5. **3.** a) a ; b) ax_0. **4.** a) 5 ; 4,1 và 4,01. b) 4.

5. a) $y = 3x + 2$; b) $y = 4(3x - 4)$; c) $y = 3x \pm 2$.

6. a) 49,49 m/s ; 49,049 m/s và ≈ 49,005 m/s ; b) 49 m/s.

7. $f'(-1) = 5$; $f'(-2) = 80$; $f'(2) = 80$.

8. a) $2ax$; b) $3x^2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$.

9. a) $\frac{-2}{(2x-1)^2}$ với $x \neq \frac{1}{2}$; b) $\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$ với $x < 3$. **10.** a) $f'(3) = 27$, $f'(-4) = 48$;

b) $f'(1) = \frac{1}{2}$; $f'(9) = \frac{1}{6}$.

11. a) Mệnh đề sai ; b) Mệnh đề đúng. **12.** $f'(x_1) < 0$; $f'(x_2) = 0$; $f'(x_3) > 0$.

14. b) Không tồn tại $f'(0)$; c) Mệnh đề sai.

15. Hàm số gián đoạn tại x_1 và x_3, liên tục tại x_2 và x_4 ; có đạo hàm tại x_4 và $f'(x_4) = 0$.

16. a) –1 ; b) 10 ; c) 8.

17. a) $5x^4 - 12x^2 + 2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$; b) $-2x^3 + 2x - \frac{1}{3}$; c) $x^3 - x^2 + x - 1$; d) $\frac{a}{a+b}$.

18. a) $2x(x^6 + 1)(7x^6 + 1)$; b) $4x(-3x^2 + 1)$; c) $\frac{-2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; d) $\frac{-5x^2+6x+8}{(x^2+x+1)^2}$; e) $\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; f) $2(9x^2 + x - 1)$.

19. a) $32(x - x^2)^{31}(1 - 2x)$; b) $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; c) $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$; d) $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$.

20. $x < 0$ hoặc $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. **21.** a) $x < 0$ hoặc $x > 2$; b) $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

22. a) $x_1 \approx 5,162$; $x_2 \approx -1,162$; b) $x_1 = 1$; $x_2 \approx 3,449$; $x_3 \approx -1,449$.

23. a) $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$; b) $\frac{-5(2x-1)}{(x^2-x+1)^6}$; c) $2x + \frac{3}{2}\sqrt{x}$; d) $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$; e) $\frac{x^2-1}{2x^2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}}$ (hay $\frac{x^2-1}{2\sqrt{x^3(x^2+1)}}$).

24. a) $y = 2x - 1$; b) $y = \frac{x+6}{4}$. **25.** $y = \pm 2x - 1$.

26. $x_0 \approx 0,4142$; $x_1 \approx 0,7321$; $x_2 = 1$; $x_3 \approx 1,2361$. **27.** $t = 20$s ; $y(20) = 1960$m.

28. a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) –1.

29. a) $5\cos x + 3\sin x$; b) $(2x - 3)\cos(x^2 - 3x + 2)$; c) $-\frac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$; d) $2(4\cos 8x - \cos 2x)$; e) $-\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$; f) $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

31. a) $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$;

b) $-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1+\cot^2(x^2+1)\right)$;

c) $\frac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$ d) $\frac{12}{\sin^2 6x}$;

e) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+2\tan x}}$;

f) $\cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}$.

33. a) $(x\cos x - \sin x)\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

b) $\dfrac{\sin 2x}{1+\tan 2x} - \dfrac{2\sin^2 x(1+\tan^2 2x)}{(1+\tan 2x)^2}$;

c) $\dfrac{\cos x}{\cos^2(\sin x)}$; d) $\dfrac{\sin 2(x^2-1) - 4x^2}{2\sin^2(x^2-1)}$;

e) $\dfrac{2\sin\sqrt{\pi - 8x}}{\sqrt{\pi - 8x}}$; f) $\dfrac{2\sin 3x + 3x\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$.

34. $-\pi^2$.

35. a) $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $\dfrac{-\pi}{6} + k2\pi$; $\dfrac{7\pi}{6} + k2\pi$;

b) $\dfrac{1}{2}(\alpha + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi)$ trong đó $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

c) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$; d) $\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$.

36. $x = \dfrac{1}{16}(\pi + 4 + k2\pi)$. **37.** $\approx$ 31,41593 mA.

38. a) $m = -1$; b) $m = \dfrac{-\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2} - 1}$. **39.** $-0{,}01$; $-0{,}001$.

40. a) $\dfrac{1}{2(a+b)\sqrt{x}}dx$; b) $(\sin x + x\cos x)dx$;

c) $(2x + \sin 2x)dx$; d) $\dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$.

41. a) $\approx$ 1,0005 ; b) $\approx$ 0,998 ; c) $\approx$ 0,7009.

42. a) $24 - 16\cos 2x$; b) $-16\sin 2x$.

c) $f'(x) = 6(x+10)^5$; $f''(x) = 30(x+10)^4$; $f'''(x) = 120(x+10)^3$; $f^{(4)}(x) = 360(x+10)^2$; $f^{(5)}(x) = 720(x+10)$; $f^{(6)}(x) = 720$; $f^{(n)}(x) = 0$ $(\forall n \geq 7)$.

44. a) $a(4) = 32$ m/s^2 ; b) $a(1) = 14$ m/s^2.

45. a) $dy = \dfrac{6(2\cos^4 3x + 1 - 2\cos^2 3x)}{\sin^3 3x\cos^3 3x}dx$.

b) $dy = -\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos^2 2x + 1}}dx$.

46. a) $\approx$ 0,222 ; b) $\approx$ 0,566.

47. a) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$; $f''(x) = 2\tan x(1 + \tan^2 x)$; $f^{(3)}(x) = 2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1 + \tan^2 x)$.

49. a) $2x^3 + 5x^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$;

b) $\dfrac{x^2 - 2x + a^2 - 3}{(x-1)^2}$; c) $x^2\sin x$;

d) $2\left(\dfrac{\sin x}{\cos^3 x} + \dfrac{x}{\cos^2 x^2}\right)$.

51. a) $-\cos x$; b) $128\cos 4x - 648\cos 6x$;

c) $y' = -5(4-x)^4$; $y'' = 20(4-x)^3$; $y''' = -60(4-x)^2$; $y^{(4)} = 120(4-x)$; $y^{(5)} = -120$; $y^{(n)} = 0$ $(\forall n \geq 6)$; d) $\dfrac{(-1)^n.n!}{(2+x)^{n+1}}$; e) $\dfrac{(-1)^n n!2^n}{(2x+1)^{n+1}}$;

f) $(-1)^n.2^{2n-1}.\cos 2x$.

52. $\approx -0{,}0059$. **53.** a) $y = 2(4x-3)$ và $y = -2(4x+3)$; b) $y = -1$; c) $y = 2(4x-3)$;

d) $y = 2(4x-3)$ và $y = -2(4x+3)$.

54. $\left(\dfrac{3}{4}; -4\right)$. **55.** $P(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$.

56. $y = -x - \dfrac{1}{4}$. **57.** a) -9 m/s ; b) 12 m/s^2 ;

c) 12 m/s^2 ; d) -12 m/s.

58. a) đúng ; b) sai ; c) sai. **59.** (A). **60.** (C).

61. (B). **62.** (D).

63. a) $\cot\sqrt{x}$; b) $(\cos x + \sin x)^n$; c) $y = \tan u$ và $u = 3x$; d) $y = \sqrt{u}$ và $u = \cos x$.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. a) $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$;

$\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

b) $C = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

2. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

3. a) $-2\sqrt{2}$; b) 4 ; c) $4 - 2\sqrt{2}$.

4. a) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$;

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$;

c) $x = k\frac{\pi}{2}$. *HD :* $\cos 3x = \cos(x + 2x)$;

d) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$; $x = k\pi$.

5. a) $x = \pm a - 40^o + k360^o$ với $\cos a = -\frac{3}{4}$.

b) $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{4}$.

c) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \arctan 2 + k\pi$.

6. a) $x = k2\pi$. *HD :* Đặt $y = \frac{1}{\cos x}$.

b) $x = \pi + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

HD : $\tan^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$.

c) $x = \frac{k\pi}{3}$.

7. a) 3! = 6 trường hợp. b) 18 trường hợp.

8. $\frac{n(n-1)}{2}$. **9.** a) $\frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{1}{8}$; $\frac{6.7}{C_{16}^2} = \frac{7}{20}$.

b) $\frac{C_3^3}{C_{16}^3} = \frac{1}{560}$; $\frac{6.7.3}{560} = \frac{9}{40}$.

10. a) 5,96 ; b) 48 . 5,96 = 286,08.

11. b) *HD :* Chứng minh bằng quy nạp.

12. a) Chứng minh bằng quy nạp ;

b) *HD :* $2^{2(n+1)+1} > 2^{2n+1}$;

13. a) $u_n = 7 - 2n$; b) $S_{100} = -9400$.

14. a) $u_n = 2.3^{n-1}$; b) $S_{10} = 3^{10} - 1$.

15. $(x ; y) = (3 ; 1)$, $(x ; y) = \left(-\frac{6}{13} ; -\frac{2}{13}\right)$.

16. a) 1 ; b) 0 ; c) $+\infty$; d) $-\frac{8}{5}$. **17.** a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1. **18.** $u_1 = 12$; $q = \frac{1}{5}$ hoặc $u_1 = 3$; $q = \frac{4}{5}$. **19.** a) 2 ; b) $\frac{1}{10}$; c) 1 ; d) 0 ; e) $-\infty$; f) $\sqrt{2}$; g) $+\infty$; h) 0 ; i) 2.

20. *HD :* Do tính liên tục của hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

và $\lim f(x) = +\infty$, $\lim f(x) = -\infty$.

21. a) $\frac{2ax^3 + bx^2 - c}{(a+b)x^2}$;

b) $12\left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^3\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)$;

c) $x^2(3\cos^2 x - x\sin 2x)$; d) $\frac{x\cos\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4+x^2}}$

e) $\frac{x^2 - 1}{2x^2\cos^2\left(x + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \tan\left(x + \frac{1}{x}\right)}}$.

22. a) $m = \frac{1}{3}$; b) $m < 0$; c) $m > \frac{1}{3}$.

23. a) $x = \pi + k2\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$;

b) $x = k\frac{2\pi}{3}$; $x = \frac{2\alpha}{3} + k\frac{2\pi}{3}$ với $\tan\alpha = 2$.

24. a) $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$;

b) *HD :* $I(2a ; 0)$, $J\left(0 ; \frac{2}{a}\right)$. c) $S_{OIJ} = 2$ (đơn vị diện tích). **25.** $-4 \le x \le 8$.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**
Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Biên tập lần đầu : **TRẦN HỮU NAM – HOÀNG XUÂN VINH**
Biên tập tái bản : **ĐẶNG THỊ MINH THU**
Biên tập kĩ, mĩ thuật : **ĐINH THỊ XUÂN DUNG - TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa và minh hoạ : **NGUYỄN BÍCH LA**
Sửa bản in : **HOÀNG VIỆT**
Chế bản : **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 - NÂNG CAO

Mã số : NH101T0

In............... cuốn (QĐ in số : ....), khổ 17 × 24 cm.
Đơn vị in : .... địa chỉ ....
Cơ sở in : .... địa chỉ ....
Số ĐKXB : 01 - 2020/CXBIPH/747 - 869/GD
Số QĐXB : ... / QĐ-GD ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm ...
Mã số ISBN : 978-604-0-19026-0